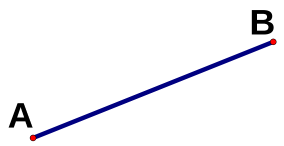
الهندسة الفراغية Space Geometry | تمرن 1- 10

المستقيمات والمستويات في الفضاء Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1 - 5) هل الشكل يجب أن يكون موجوداً في مستوٍ واحد فقط

(1)



$\overline{AB}$ تقع في مستو واحد

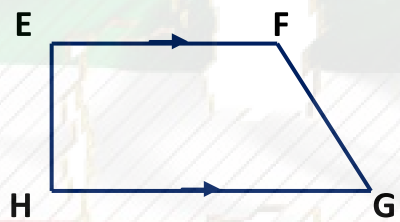
(2)

النقطة E تقع في مستو واحد

(3)

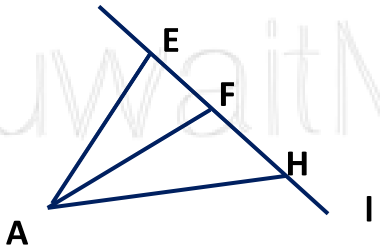
المستقيمان $\overleftrightarrow{l}$ ، $\overleftrightarrow{h}$ في مستو واحد

(4)



المضلع $EFGH$ في مستو واحد

(5)

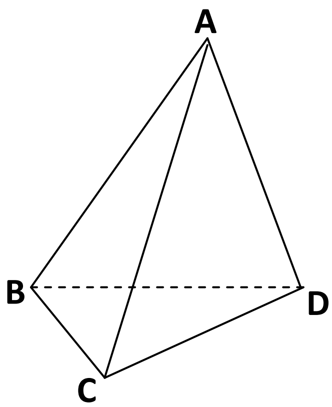


الشكل يقع في مستو واحد

(4)

(6) $A\ B\ C\ D$ هرم ثلاثي القاعدة

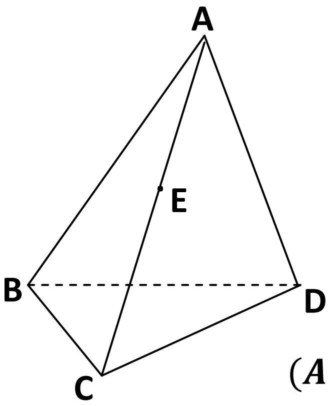
سم المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم



المستوى $(A\ B\ C)$ ، المستوى $(A\ B\ D)$

المستوى $(B\ C\ D)$ ، المستوى $(A\ C\ D)$

(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوى $(A\,C\,D)$ وفي المستوى $(A\,B\,C)$



$\because \quad (A\,B\,C) \cap (A\,C\,D) = \overleftrightarrow{AC}$

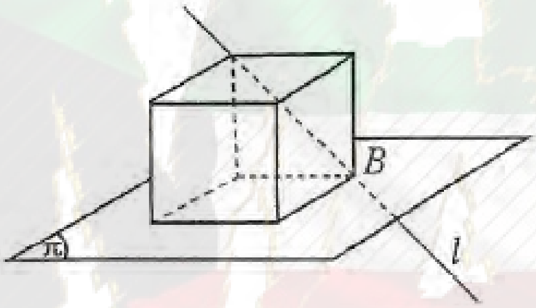
$\therefore \quad \overleftrightarrow{AC} \subseteq (A\,C\,D)$

، $\quad \overleftrightarrow{AC} \subseteq (A\,B\,C)$

$\because \quad E \in \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore$ **E تقع في المستوى $(A\,C\,D)$ وفي المستوى $(A\,B\,C)$**

(8) (a) أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.



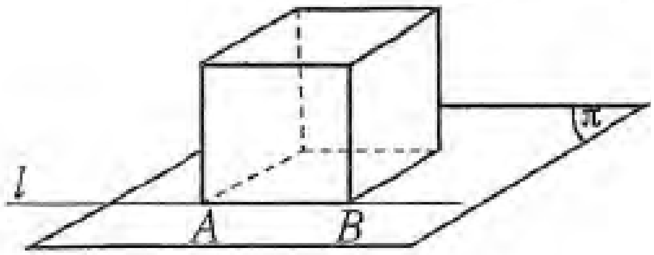
$\because$ المكعب $\cap\ \pi \ni B$

، $\quad B \in \overleftrightarrow{l}$

$\therefore \quad \pi \cap \overleftrightarrow{l} = \{B\}$

$\therefore$ **نقطة تقاطع المستوى π و المستقيم $\overleftrightarrow{l}$ هي B**

(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.

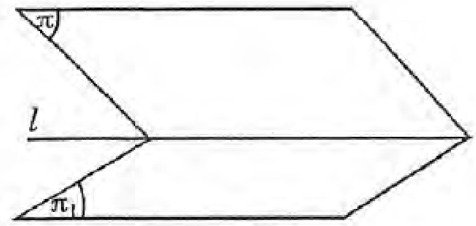


$\because$ المكعب $\cap\ \pi \supseteq \overleftrightarrow{AB}$

, $\quad A\,,B \in \overleftrightarrow{l}$

$\therefore$ **تقاطع المستوى π و المستقيم $\overleftrightarrow{l}$ هو $\overleftrightarrow{l}$**

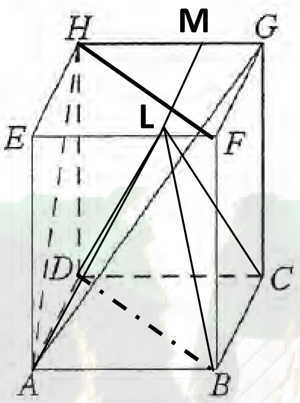
(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.



$\because \quad \overleftrightarrow{l} \subseteq \pi \cap \pi_1$

$\therefore$ **تقاطع المستوى π و المستوى π_1 هو**

(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:



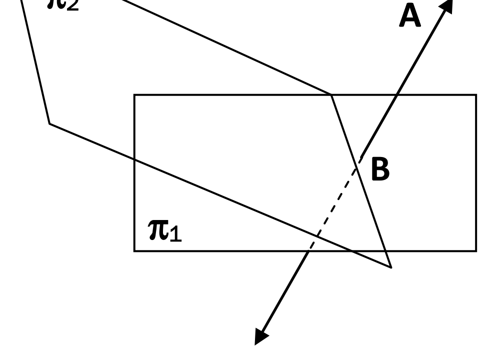
(a) $(AGH)\cap(ABC) = \{\, \boldsymbol{A} \,\}$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $BFH, ABCD$ **هو** $\overleftrightarrow{BD}$

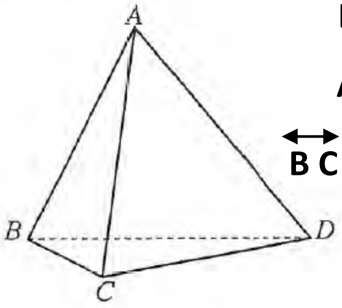
(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

سم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL **هو** $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

(10) ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.



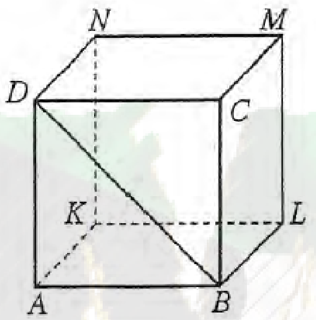
(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.



(a) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟ **هي B**

(b) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD؟ **هي A**

(c) ما هو تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟ **هو $\overleftrightarrow{BC}$**



(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب:

(a) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ND}$، $\overleftrightarrow{BD}$؟ **هي D**

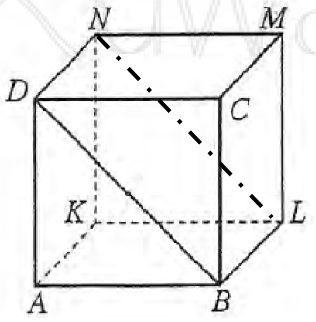
(b) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BC}$؟ **هي Φ**

(c) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BD}$، $\overleftrightarrow{ML}$؟ **هي Φ**

(d) ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ML}$ والمستوي $ABLK$؟ **هي L**

(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD، $ABCD$ **هو B D**

(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.



$\because \overleftrightarrow{BL} \parallel \overleftrightarrow{DN}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{LM}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ **يعينان مستوٍ وحيد**

$\therefore$ **L , B , D , N تنتمي إلى مستوٍ واحد**

(g) هل $\overleftrightarrow{ND}$, $\overleftrightarrow{ML}$ يعينان مستويًا واحدًا؟ **لا**

(h) أثبت أن المستويين ADK , CMN يتقاطعان.

$\because (ADK) \subseteq (ADNK)$ ، $(CMN) \subseteq (CMND)$

، $(ADNK) \cap (ADNK) = \overleftrightarrow{DN}$

$\therefore (CMN) \cap (ADK) = \overleftrightarrow{DN}$

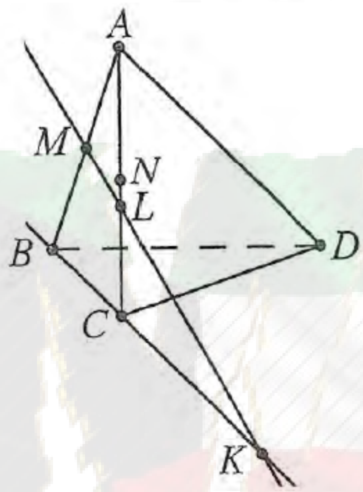
(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$، $L \in \overline{AC}$، $L \neq N$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوي ABC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{CB}$ يتقاطعان في النقطة K

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوي BCD؟



(a) $\because$ $M \in \overleftrightarrow{AB}$ ، $L \in \overleftrightarrow{AC}$

، $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يعينان $(A\,B\,C)$

$\therefore$ $M\,,\,L \in (A\,B\,C)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{M\,L}$ يقع في المستوى $A\,B\,C$

(b) $\because$ M منتصف $\overline{\mathrm{A\,B}}$ ، N منتصف $\overline{\mathrm{A\,C}}$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{M\,N}}$ // $\overline{\mathrm{B\,C}}$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{M\,L}}$ لا يوازي $\overline{\mathrm{B\,C}}$

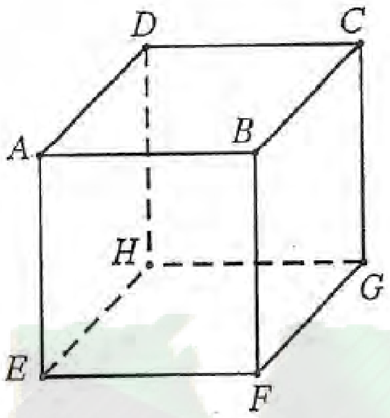
$\therefore$ $\overline{\mathrm{M\,L}}$ ، $\overline{\mathrm{B\,C}}$ متقاطعان في النقطة K

(C) نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{M\,L}$ مع المستوى $B\,C\,D$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان AB , HG يعينان مستويًا. (b)

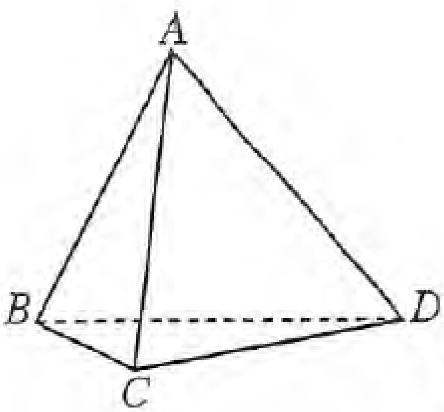
(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا. (b)

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا. (a)

(4) المستقيمان GC , EF يعينان مستويًا. (a)

(5) المستقيمان BC , AB يعينان مستويًا. (b)

في التمارين (6–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

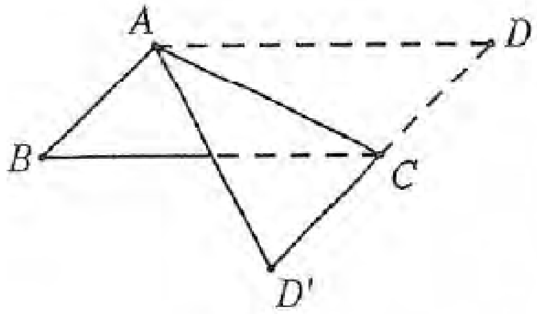
مستويًا واحدًا

(b) مستويين اثنين

(c) عدد لا منته من المستويات

(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) $ABCD$ متوازي أضلاع. إذا تمّ طيّه على طول $\overline{AC}$ دون أن ينطبق القسمان على بعضهما يتعين:



(a) مستوٍ واحدٍ

(b) مستويان

(c) ثلاثة مستويات

(d) أربعة مستويات

(8) منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

(a) خمسة مستويات

(b) ستة مستويات

(c) سبعة مستويات

(d) ثمانية مستويات

(9) الأسطوانة تعيّن:

(a) صفر مستوٍ

(b) مستوٍ واحد

(c) مستويين اثنين

(d) ثلاثة مستويات

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء Parallel Lines and Planes in Space

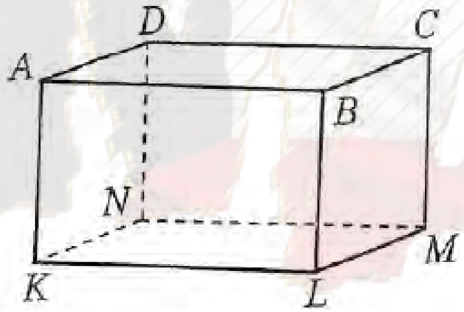
المجموعة A تمارين مقالية

(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستوٍ واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN



(a) $\because$ $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{BL}$

، $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{BL}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) $\therefore$ $\overleftrightarrow{AK}$, $\overleftrightarrow{CM}$ يعينان مستوٍ وحيد هو $(AKMC)$

$\therefore$ $A, K, M, C \in (AKMC)$

$\therefore$ A, K, M, C تنتمى إلى مستوٍ واحد

(c) $\because$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{KN}$

، $\overleftrightarrow{KN} \subseteq (MKN)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel (MKN)$

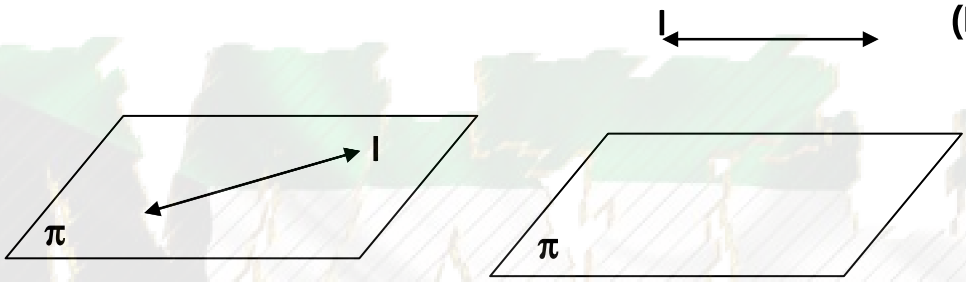
(2) (a) متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟

(b) ارسم مستقيمًا يوازي المستوي π

(a) يكون المستقيم $\overleftrightarrow{l}$ موازياً للمستوى π إذا كان

$$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \varphi \qquad \text{أو} \qquad \overleftrightarrow{l} \subseteq \pi$$

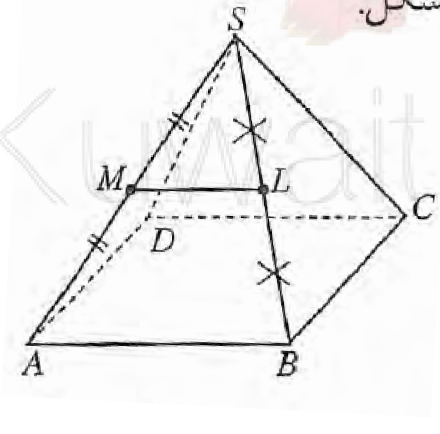
(b)



(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$



$\because$ M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

$\therefore$ $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

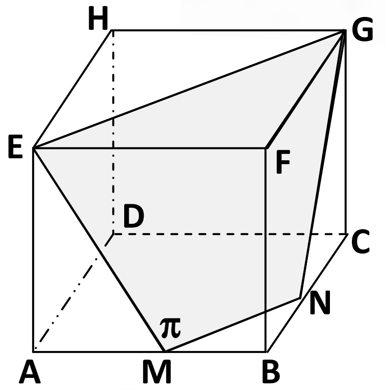
، $\overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABCD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

(4) $ABCDEFGH$ مكعب.

$M \in \overline{AB}$، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{MN}$



∵ G , E , M ثلاث نقاط مختلفة وليست مستقيمة

∴ G , E , M تعين مستوٍ وحيد π

∵ $(A\,B\,C\,D) \parallel (E\,F\,G\,H)$ ، π قاطع لهما

في $\overline{E\,G}$ ، $\overline{M\,N}$

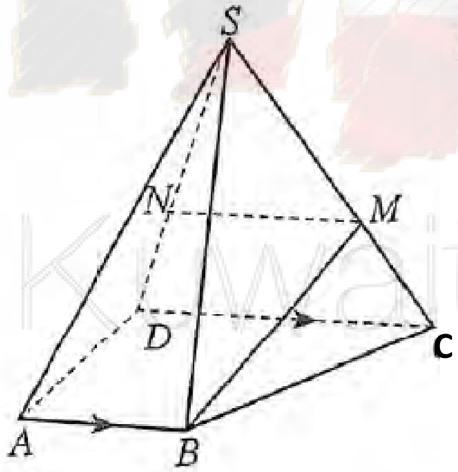
∴ $\overline{E\,G} \parallel \overline{M\,N}$

(5) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ شبه منحرف بحيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$M \in \overline{SC}$، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



∵ $\overleftrightarrow{A\,B} \parallel \overleftrightarrow{D\,C}$

، $\overleftrightarrow{A\,B} \subseteq (A\,B\,M\,N)$

، $\overleftrightarrow{D\,C} \subseteq (S\,D\,C)$

، $(S\,D\,C) \cap (A\,B\,M\,N) = \overleftrightarrow{M\,N}$

∴ $\overleftrightarrow{M\,N} \parallel \overleftrightarrow{C\,D}$

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

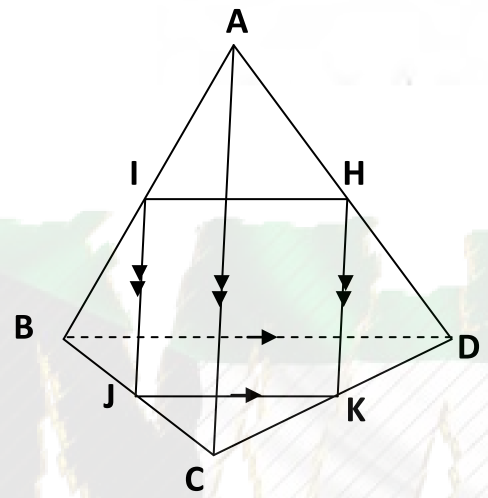
المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overleftrightarrow{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$



$\because \overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

، $\overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{HK}$

$\therefore \overleftrightarrow{IJ}$ ، $\overleftrightarrow{HK}$ يعينان مستوٍ وحيد

في المثلث ABC

$\because \overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \frac{CJ}{JB} = \frac{AI}{IB}$ بالمثل $\frac{CK}{KD} = \frac{AH}{HD}$ .... (1)

في المثلث BCD

$\because \overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore \frac{CJ}{JB} = \frac{CK}{KD}$ .... (2)

من (1) ، (2)

$\therefore \frac{AH}{HD} = \frac{AI}{IB}$

$\therefore \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AB}$

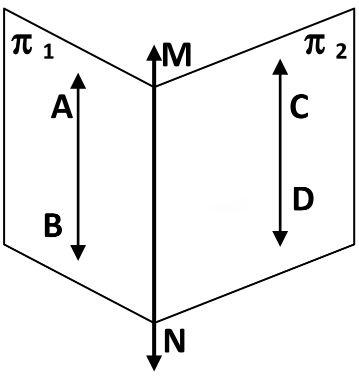
$\therefore \overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

(7) ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \subseteq \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

، $\pi_1 \cap \pi_2 \subseteq \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ .... (1)

$\because$ $\overleftrightarrow{CD} \subseteq \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

، $\pi_1 \cap \pi_2 \subseteq \overleftrightarrow{MN}$

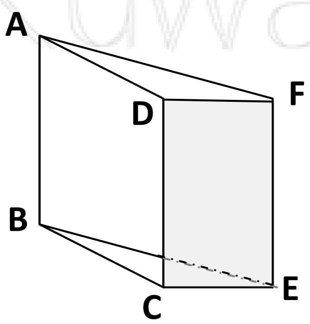
$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ .... (2)

من (1) ، (2)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(8) $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDEF$ متوازي أضلاع



$\because$ $ABCD$ متوازي أضلاع

$\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ويساويه .... (1)

$\because$ $ABCD$ متوازي أضلاع

$\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{FE}$ ويساويه .... (2)

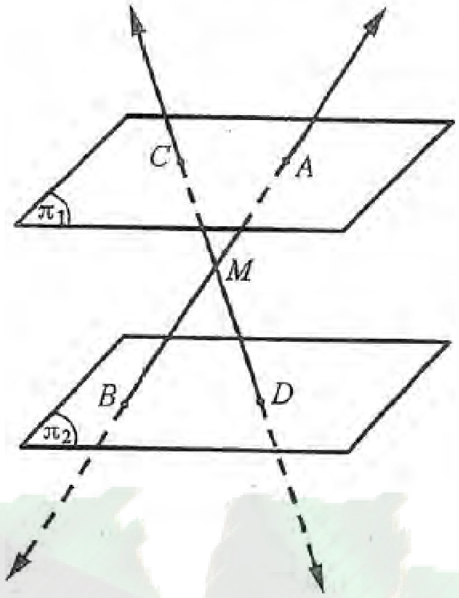
من (1) ، (2)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{FE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ وهما يعينان مستوٍ وحيد

$\therefore$ $\overline{FE} \parallel \overline{CD}$ ويساويه

$\therefore$ $CDFE$ متوازي أضلاع

(9) في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،
حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$
أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



∵ $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \{M\}$

∴ $\overline{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ يعينان مستوٍ وحيد π

∵ π_2 // π_1 ، π قاطع لهما في

$\overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{AC}$

∴ $\overline{DB}$ // $\overline{AC}$

∴ المثلث ACM يشابه المثلث BDM (ز ، ز ، ز)
ينتج أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a)

(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$ ، $\overleftrightarrow{m} \parallel \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ (a)

(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما
هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين. (b)

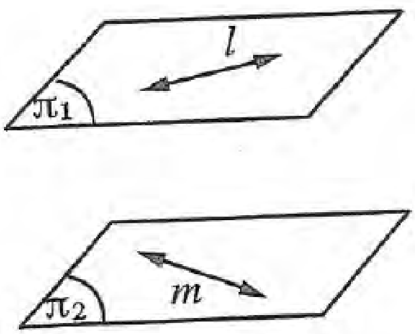
في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

متوازيان (d) متعامدان

(7) في الشكل المقابل: إذا كان $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:



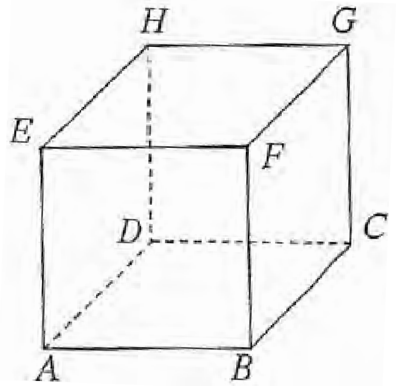
(a) $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

(b) $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

(c) $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان

$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EG}$ هما:



(a) متوازيان

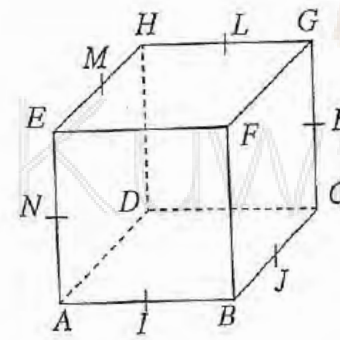
(b) متقاطعان

(c) متخالفان

(d) يحويهما مستوٍ واحد

في التمارين (12–9)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

في المكعب المقابل I, J, K, L, M, N منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$ على الترتيب.



القائمة (1)	القائمة (2)
(9) $\overleftrightarrow{EK}$ // b	(a) (MNK)
(10) $\overleftrightarrow{ML}$ // c	(b) (NBC)
	(c) (AFC)

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) (IJK) // c	(a) (MNC)
(12) (JKE) // a	(b) (HFG)
	(c) (LMN)

تمرين 3- 10	الهندسة الفراغية Space Geometry

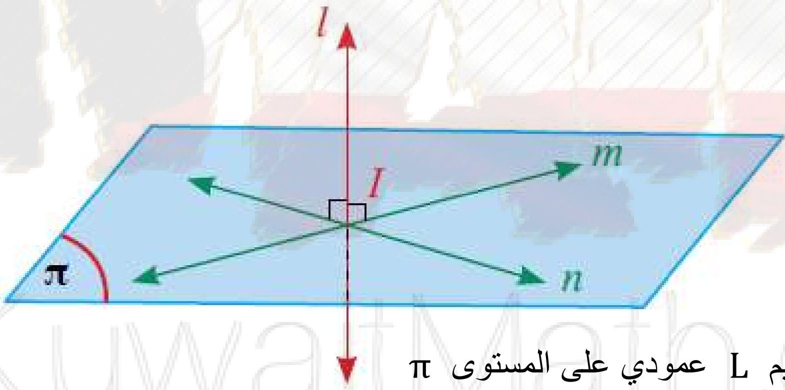
تعامد مستقيم مع مستوى Perpendicular Line With a Plane Space

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًّا على المستوي؟
(b) ارسم مستقيمًا عموديًّا على مستوٍ.

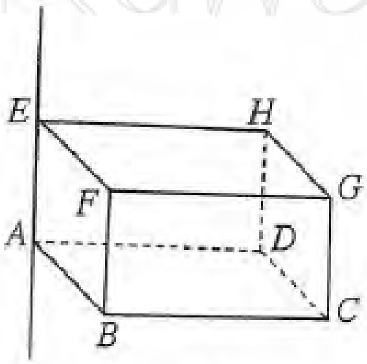
(a) يكون المستقيم عمودياً على المستوى إذا كان عمودياً على جميع المستقيمات الواقعة في المستوى (تعريف)
يكون المستقيم عمودياً على المستوى إذا كان عمودياً على مستقيمين متقاطعين في المستوى (نظرية)

(b)



المستقيم L عمودي على المستوى π

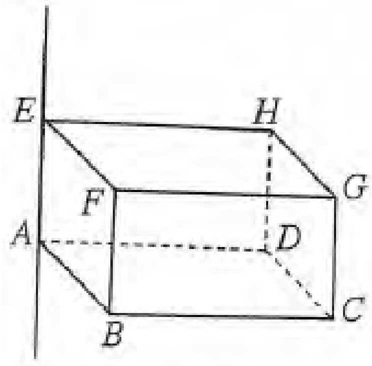
(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعّب.



(a) سمِّ المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$
(b) سمِّ المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$
(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوى CGH

(a) المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$ هي $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$
، $\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{EH}$ ، $\overleftrightarrow{HG}$ ، $\overleftrightarrow{FG}$

(b) المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$ هي $(ABCD)$ ، $(EFGH)$



(c) $\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overline{DC}$

، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{DH}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (CDHG)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (CHG)$

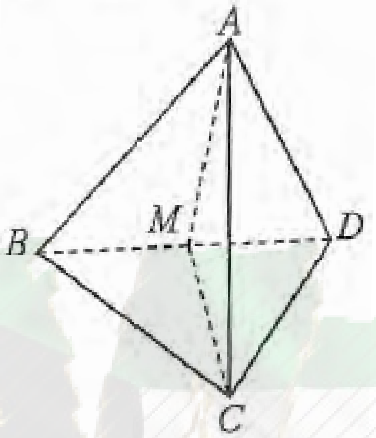
(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ،$CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$



(a) $\because AD = AB$ ، M منتصف $\overline{DB}$

$\therefore \overline{AM} \perp \overline{BD}$

$\because CD = CB$ ، M منتصف $\overline{DB}$

$\therefore \overline{CM} \perp \overline{BD}$

$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overline{AM}$ ، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overline{CM}$

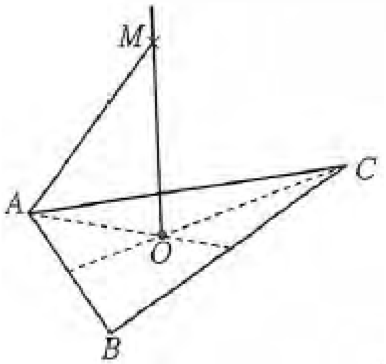
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) $\because \overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$ ، $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (AMC)$

$\therefore \overline{CM} \perp \overline{BD}$

(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overleftrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$



$\because$ O مركز المثلث ABC

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AO} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\because$ $\overleftrightarrow{MO} \perp (ABC)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MO} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MO}$ ، $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AO}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp (AMO)$

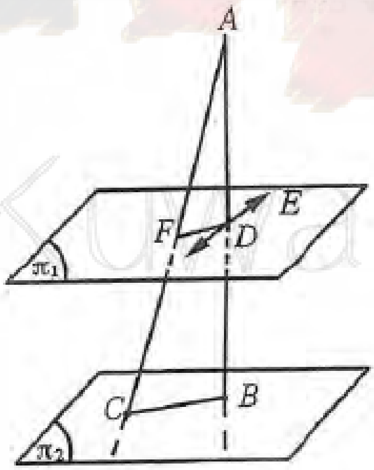
$\because$ $\overleftrightarrow{BC} \perp (AMO)$ ، $\overleftrightarrow{AM} \subseteq (AMO)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 ، π_1 $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$,

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{CB} \subseteq \pi_2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $m(ABC) = 90^\circ$

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{FD} \parallel \overline{CB}$

$\therefore$ $\overline{FD} \parallel \overline{CB}$

$\therefore$ $m(ADF) = 90^\circ$ بالتناظر والتوازي

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{FD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

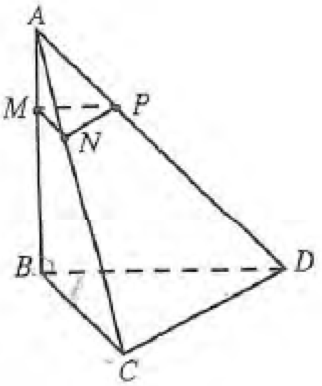
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore$ $\pi_1 \parallel \pi_2$

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

نأخذ النقاط M, N, P كما يلي: $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AN}$ ، $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AP}$ ،

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)



$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $m(ABC) = 90^{\circ}$

$\because$ $AB = 3\,AM$ ، $AC = 3\,AN$

$\therefore$ $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = 3$

$\therefore$ المثلث ABC يشابه المثلث AMN

$\therefore$ $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore$ $m(AMN) = 90^{\circ}$ بالتناظر والتوازي

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MN}$ بالمثل

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MP}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MN}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MP}$

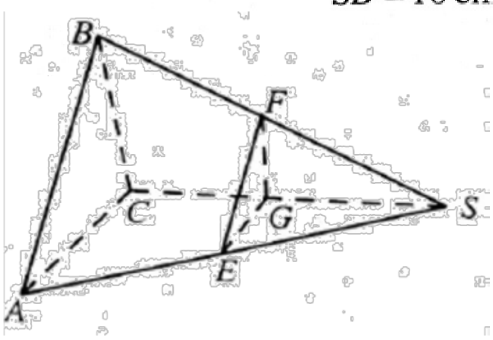
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (MNP)$

(7) في الشكل المقابل، $(ABC) \,//\, (EFG)$, S نقطة خارج $(ABC), (EFG)$

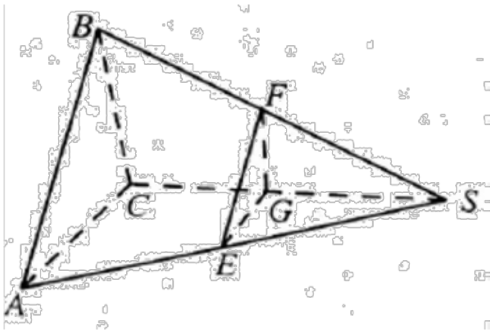
بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

فإذا كان: $SB = 10\text{ cm}, SC = 8\text{ cm}, BC = 6\text{ cm}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



في المثلث $S\,B\,C$



$(B\,C)^2 = 36$

$(C\,S)^2 = 64$

$(B\,S)^2 = 100$

$(B\,S)^2 = (B\,C)^2 + (C\,S)^2$

في المثلث $S\,B\,C$ قائم الزاوية في C

$\therefore \quad \overleftrightarrow{S\,C} \perp \overleftrightarrow{B\,C}$

$\because \quad \overleftrightarrow{S\,C} \perp \overleftrightarrow{A\,C}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{S\,C} \perp (\mathrm{A\,B\,C})$

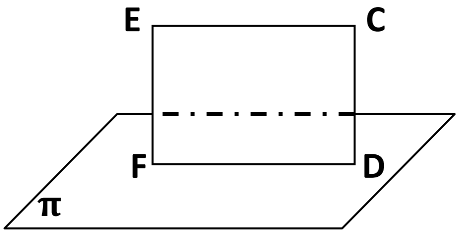
$\therefore \quad (\mathrm{A\,B\,C}) \;//\; (\mathrm{E\,F\,G})$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{S\,C} \perp (\mathrm{E\,F\,G})$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{S\,C} \subseteq (\mathrm{E\,F\,G})$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{S\,C} \perp \overleftrightarrow{F\,E}$

(8) ليكن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.



$\because \quad \overleftrightarrow{E\,F} \perp \pi$ ، $\overleftrightarrow{C\,D} \perp \pi$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{E\,F} \;//\; \overleftrightarrow{C\,D}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{E\,F}$, $\overleftrightarrow{C\,D}$ **يعينان مستوٍ وحيد**

$\because \quad (\mathrm{C\,D\,F\,E}) \cap \pi = \overleftrightarrow{E\,F}$ ، $\overleftrightarrow{E\,C} \subseteq (\mathrm{C\,D\,F\,E})$ ، $\overleftrightarrow{E\,C} \;//\; \pi$

$\therefore \quad m(E\,F\,D) = 90^\circ$ ، $\overline{E\,F} \;//\; \overline{C\,D}$ ، $\overline{F\,D} \;//\; \overline{E\,C}$

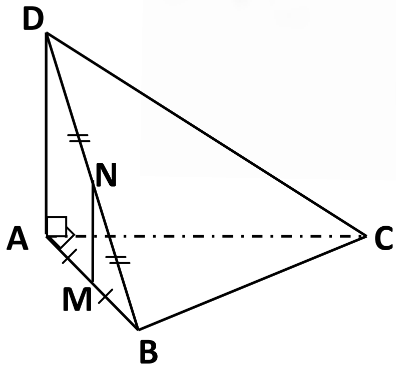
$\therefore \quad C\,D\,F\,E$ **مستطيل**

(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان:

$\overleftrightarrow{DA}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$

فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$



$\because$ $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$

$\because$ **M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{DB}$**

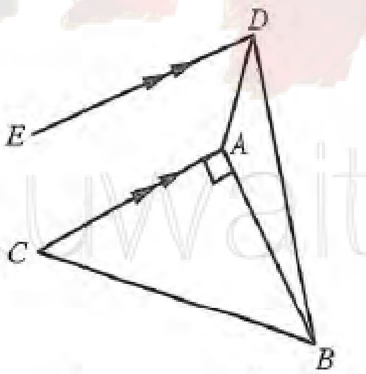
$\therefore$ $\overline{DA} \parallel \overline{MN}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$



$\because$ $\overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{ED}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{ED}$ **يعينان مستوٍ وحيد**

$\because$ **المثلث ABC قائم الزاوية في A**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CA}$

$\because$ $\overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DA}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$

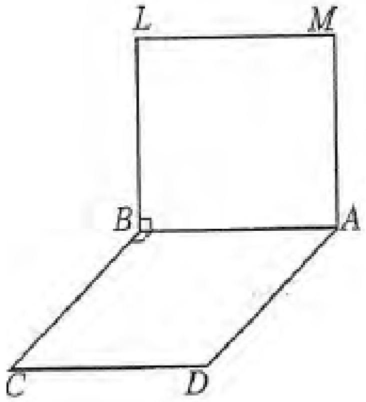
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADEC)$

$\therefore$ $(ADEC) \supseteq \overline{ED}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{ED}$

(11) $ABCD$ ، $ABLM$ مربعان، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$ ، غير موجودين في مستو واحد.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



$\because$ L , B , C **ثلاث نقاط مختلفة و ليست مستقيمة**

$\therefore$ L , B , C **تعين مستوٍ وحيد**

$\because$ $A B C D$ ، $A B L M$ **مربعان**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BL}$

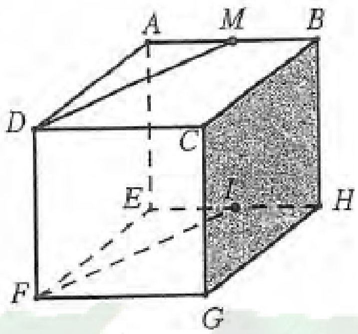
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (LBC)$

$\because$ $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{BA}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



أسئلة التمرينين (2—1)،

على الشكل المقابل حيث $ABCDEFGH$ مكعّب،

النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ — (b)

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ — (a)

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن:

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ — (b)

(4) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. — (a)

(5) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ — (a)

(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{l}$ — (a)

(7) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{l}$ متخالفان. — (a)

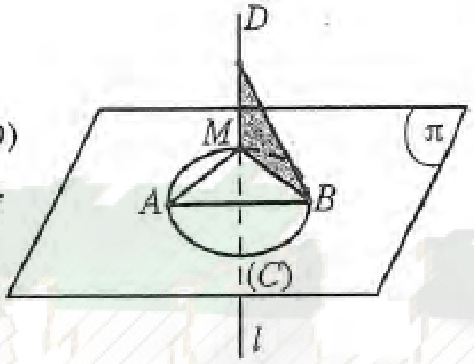
في التمارين (8–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ ● $\pi_1 \perp \pi_2$

(c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

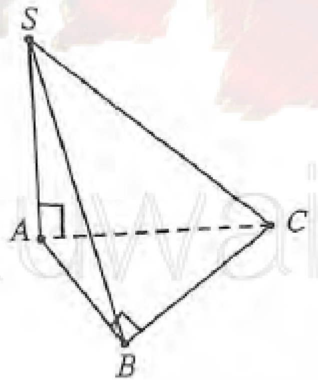
(9) في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:



(a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

● $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ (d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

(10) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:



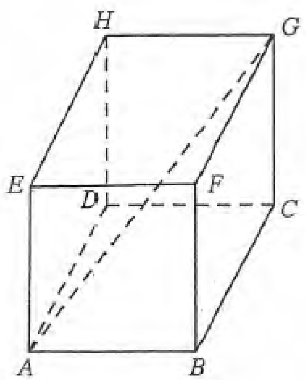
(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

● $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

(11) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره AG يساوي:

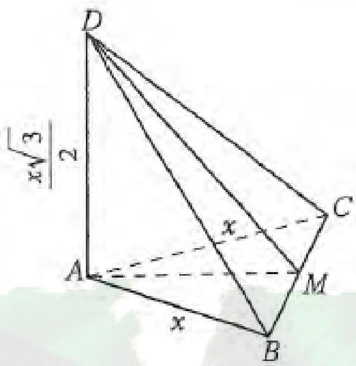


(a) $\sqrt{3}$ cm ● $3\sqrt{3}$ cm

(c) 9 cm (d) 18 cm

The Dihedral Angle الزاوية الزوجية

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

(b) أوجد الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overleftrightarrow{BC}, ACB)$

(a) $\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$

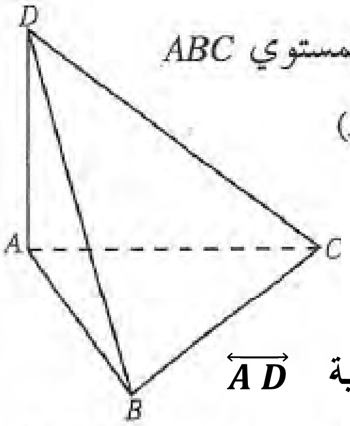
(b) $\therefore$ $\overleftrightarrow{MD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ الزاوية $\widehat{AMD}$ هي الزاوية المستوية للزاوية $\overleftrightarrow{BC}$

(c) $\therefore$ $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ، $AM = \frac{X\sqrt{3}}{2}$

$\because$ $AD = \frac{X\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $m(AMD) = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$ يساوي 45°



(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع. $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

$\because \quad \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ الزاوية $\widehat{BAC}$ هي الزاوية المستوية للزاوية $\overleftrightarrow{AD}$

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع

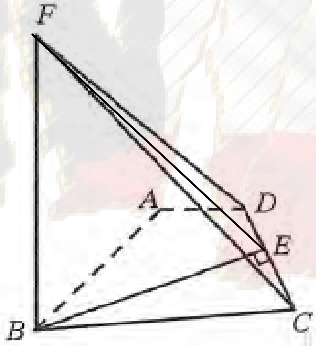
$\therefore \quad m(BAC) = 60^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{BC}, DAC)$ يساوي 60°

(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overleftrightarrow{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$،

فإذا كان $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ، $FB = BE$،

أوجد قياس الزواية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)



$\because \quad \overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{DC}$

$\because \quad \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{FB}$ ، $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{BE}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{DC} \perp (BEF)$

$\because \quad \overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{FE}$

$\therefore$ الزاوية $\widehat{BEF}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

$\because \quad \overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \quad m(FBE) = 90^\circ$

$\because$ المثلث FBE قائم الزاوية ومتطابق الضلعين

$\therefore \quad m(BEF) = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(FCD, \overleftrightarrow{DC}, ABCD)$ يساوي 45°

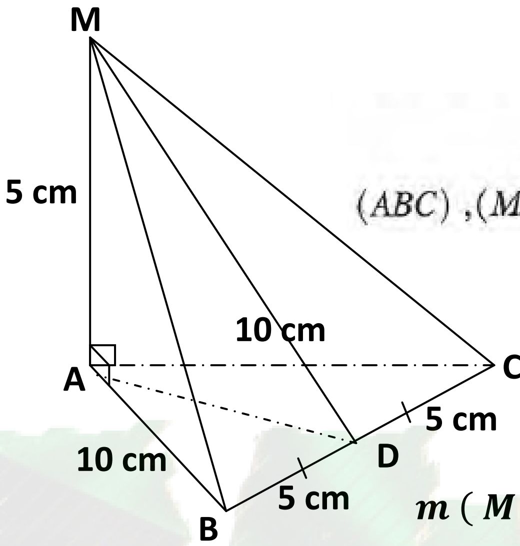
(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،

طول ضلعه 10 cm، إذا كان $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) = 90^\circ$، $MA = 5\text{ cm}$.

، D منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (MBC), (ABC)



$\because$ ABC مثلث متطابق الأضلاع

، D منتصف $\overline{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\because$ $m(MAB) = m(MAC) = 90^\circ$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MA} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{MA} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MA} \perp (ABC)$

$\because$ $\overleftrightarrow{MA} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MA}$ ، $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp (ADM)$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp MD$

$\therefore$ الزاوية $\widehat{ADM}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$

$\because$ المثلث ADC قائم الزاوية ، $AC = 10\ cm$ ، $DC = 5\ cm$

$\therefore$ $AD = 5\sqrt{3}\ cm$

$\because$ $\overleftrightarrow{MA} \perp \overleftrightarrow{AD}$ $\therefore$ $m(MAD) = 90^\circ$

$\because$ المثلث MAD قائم الزاوية ، $AD = 5\sqrt{3}\ cm$ ، $MA = 5\ cm$

$\therefore$ $\tan(ADM) = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

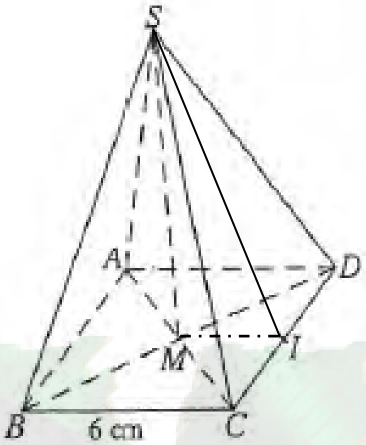
$\therefore$ $m(ADM) = 30^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{DC}, FCD)$ يساوي 30°

(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها 6 cm ومركزها M
بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$ ، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$

(b) أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$



(a) $\because$ M مركز الربع $A\,B\,C\,D$

$\therefore$ M منتصف $\overline{B\,D}$

$\because$ I منتصف $\overline{C\,D}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{M\,I} \ // \ \overleftrightarrow{B\,C}$ ،

$\therefore$ $m\,(M\,I\,D\,) = 90^{\circ}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{M\,I} \perp \overleftrightarrow{C\,D}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{S\,M} \perp (A\,B\,C\,D)$

$\because$ $\overleftrightarrow{S\,M} \perp \overleftrightarrow{C\,D}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{C\,D} \perp \overleftrightarrow{S\,M}$ ، $\overleftrightarrow{C\,D} \perp \overleftrightarrow{M\,I}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{C\,D} \perp (\,S\,M\,I\,)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{S\,I} \perp \overleftrightarrow{C\,D}$

$\therefore$ الزاوية $\widehat{M\,I\,S}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{C\,D}$

(b) $\because$ المثلث $B\,C\,D$ ، $B\,C = 6\,cm$ ، $M\,I = \frac{1}{2}\ B\,C$

$\therefore$ $M\,I = 3\ cm$

$\because$ $\overleftrightarrow{S\,M} \perp \overleftrightarrow{M\,I}$

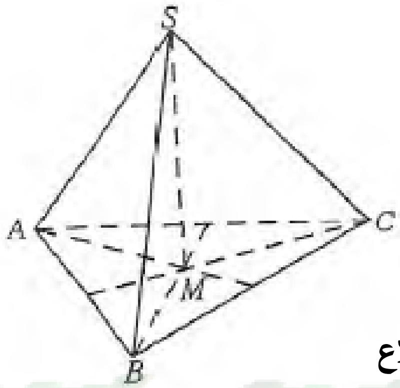
$\therefore$ $m\,(S\,M\,I\,) = 90^{\circ}$

$\because$ المثلث $S\,M\,I$ قائم الزاوية ، $S\,M = \sqrt{3}\ cm$ ، $M\,I = 3\,cm$

$\therefore$ $tan\ (\,M\,I\,S\,) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ $m\,(\,S\,M\,I\,) = 60^{\circ}$

(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M
بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$
أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(SMB , \overleftrightarrow{SM} , SMC)$



$\because$ $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ ، $\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{MC}$

$\therefore$ **الزاوية $A\widehat{D}M$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{SM}$**

$\because$ **M مركز المثلث ABC المتطابق الأضلاع**

$\therefore$ $MC = BM$

$\therefore$ $m(MCB) = m(MBC) = 30^\circ$

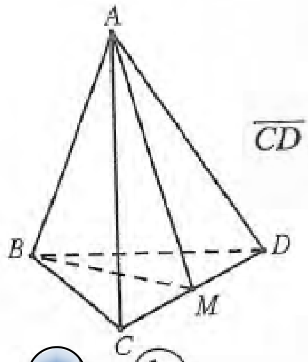
$\therefore$ $m(BMC) = 120^\circ$

$\therefore$ **قياس الزاوية الزوجية $(SMB , \overleftrightarrow{SM} , SMC)$ يساوي 120°**

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل.



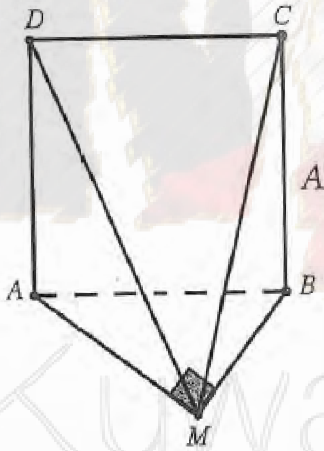
إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (b)

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $\widehat{MD}$ (a)

أسئلة التمرينين (3–4)، على الشكل المقابل.



المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:

(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (b)

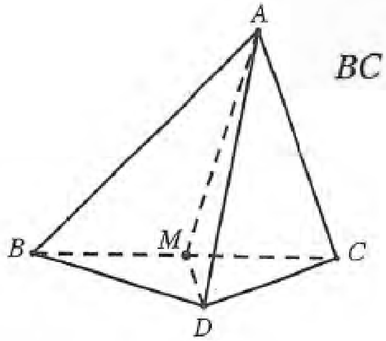
في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (5–7)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستوٍ واحد.



(5) الزاوية الزوجية (BAC، $\overleftrightarrow{BC}$، BCD) هي:

● $A\widehat{M}D$ ⓑ $B\widehat{M}C$ ⓒ $A\widehat{M}B$ ⓓ $B\widehat{A}M$

(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60°$ فقيمة AD بدلالة x هي:

ⓐ $\frac{x}{2}$ ⓑ $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ● $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$، فإنّ: $m(A\widehat{M}D) =$

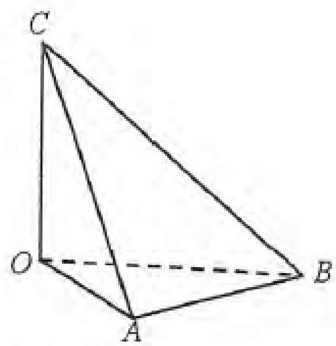
ⓐ $90°$ ⓑ $45°$ ● $60°$ ⓓ $30°$

أسئلة التمرينين (8–9) على الشكل المقابل.

إذا كان OAB مثلث فيه:

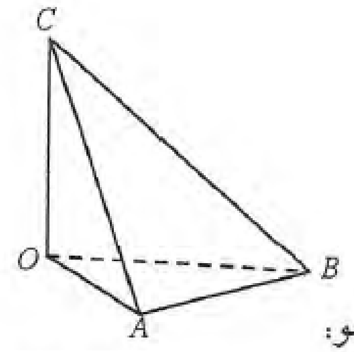
$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60°$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB



(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

ⓐ x ⓑ $x\sqrt{2}$ ● $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x}{2}$



إذا كان OAB مثلث فيه،

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60°$

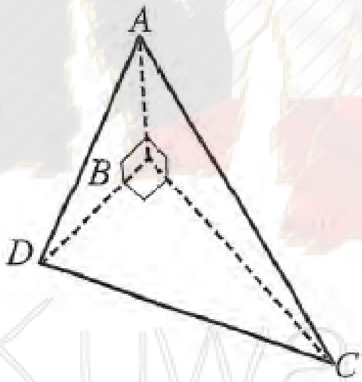
$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



(a) $D\widehat{B}C$ (b) $A\widehat{B}C$

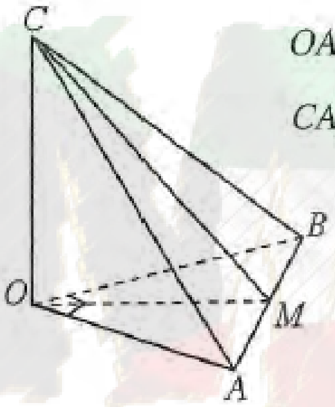
(c) $A\widehat{B}D$ (d) $A\widehat{D}C$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) OAB مثلث قائم في O، $OA = OB = 1$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$



(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

(a) $\because \overleftrightarrow{OC} \perp (OAB)$

$\therefore \overleftrightarrow{OC} \subseteq (COM)$

$\therefore (COM) \perp (OAB)$

(b) $\because OA = OB$ ، M منتصف $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .... (1)

$\because \overleftrightarrow{OC} \perp (OAB)$

$\therefore \overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .... (2)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OM}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (COM)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \subseteq (CAB)$

$\therefore (COM) \perp (CAB)$

(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

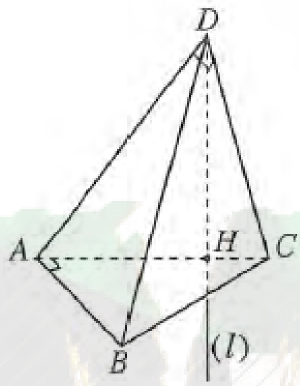
$D \in \overleftrightarrow{l}$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)

(b) استنتج أن $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)

(d) استنتج أن (BDA), (CDB) متعامدان.



(a) $\because$ **المثلث** ABC **قائم الزاوية في** A

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .... (1)

$\because$ $(ABC) \perp \overleftrightarrow{l}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{l}$ .... (2)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $(ACD) \perp \overleftrightarrow{AB}$

(b) $\because$ $(ACD) \subseteq \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore$ **المثلث** ABD **قائم الزاوية في** A

(C) $\because$ **المثلث** ADC **قائم الزاوية في** D

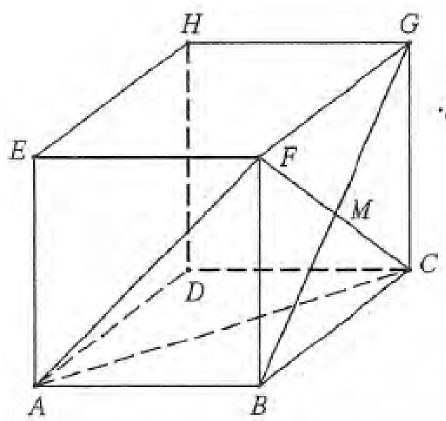
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $(ADB) \perp \overleftrightarrow{CD}$

(d) $\because$ $(CDB) \subseteq \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $(CDB) \perp (BDA)$

(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:



(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

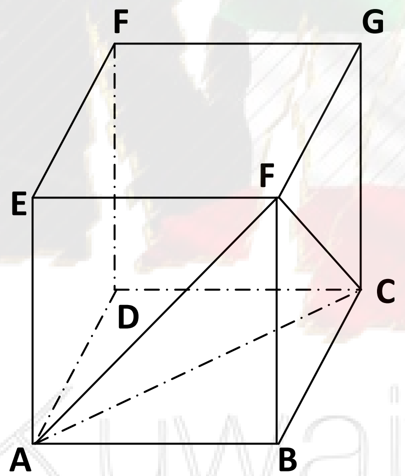
(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$، $\overline{BG}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overleftrightarrow{FC}$



(a) $\because$ $A\,B\,F\,E$ مربع

$\therefore$ $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .... (1)

$\because$ $F\,B\,C\,G$ مربع

$\because$ $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ .... (2)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{FB} \perp (A\,B\,C\,D)$

$\because$ $\overleftrightarrow{FB} \subseteq (F\,B\,C\,D)$

$\therefore$ $(F\,B\,C\,D) \perp (A\,B\,C\,D)$

(b) $\because$ $A\,B\,F\,E$ مربع طول ضلعه a

، $\overline{AC}$ قطر

$\therefore$ $AC = a\sqrt{2}$ بالمثل

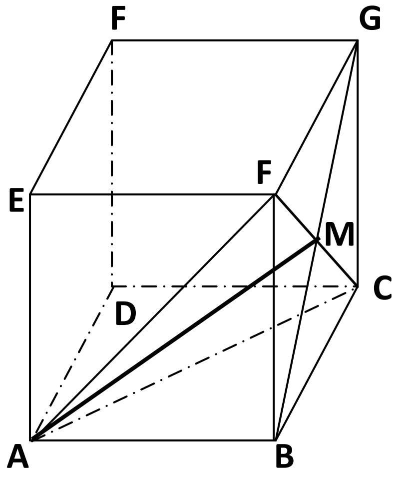
$\therefore$ $CF = AF = a\sqrt{2}$

$\therefore$ المثلث $A\,C\,F$ متطابق الأضلاع

(c) ∵ المثلث $A\,C\,F$ متطابق الأضلاع

، M منتصف $\overline{F\,C}$

∴ $\overleftrightarrow{A\,M} \perp \overleftrightarrow{F\,C}$

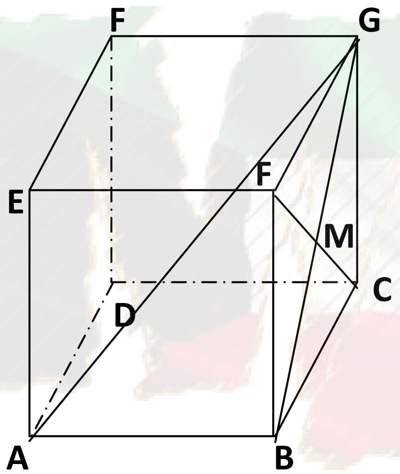


(d) ∵ $\overleftrightarrow{A\,B} \perp \overleftrightarrow{B\,F}$ ، $\overleftrightarrow{A\,B} \perp \overleftrightarrow{B\,C}$

∴ $\overleftrightarrow{A\,B} \perp (B\,C\,G\,F)$

∴ $\overleftrightarrow{A\,B} \subseteq (A\,B\,G)$

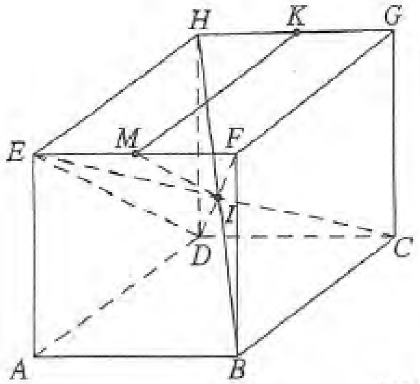
∴ $(B\,C\,G\,F) \perp (A\,B\,G)$



(e) ∵ $\overleftrightarrow{A\,B} \perp (B\,C\,G\,F)$

∴ $\overleftrightarrow{F\,C} \subseteq (B\,C\,G\,F)$

∴ $\overleftrightarrow{F\,C} \perp (B\,C\,G\,F)$



(4) $ABCDEFGH$ مكعب تتقاطع أقطاره الأربعة في النقطة I وطول ضلعه $4\ \text{cm}$

M منتصف $\overline{EF}$ ، K منتصف $\overline{HG}$

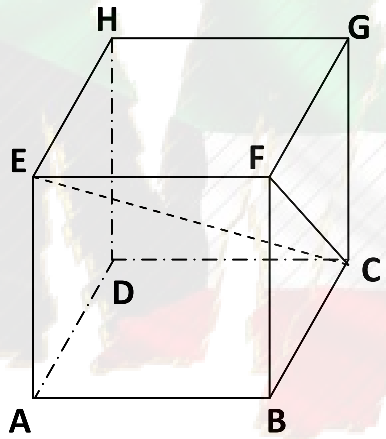
(a) أوجد طول $\overline{EC}$ واستنتج طول $\overline{EI}$

(b) أثبت أن المثلث EIF متطابق الضلعين.

(c) أثبت أن: $\widehat{IMK}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(EFH, \overleftrightarrow{EF}, EIF)$

(d) أوجد: $m(\widehat{IMK})$

(e) أثبت أن: $(AEH) \perp (EIF)$



(a) $\because$ المثلث (FCG) قائم الزاوية في G

$\therefore\ FC = \sqrt{(FG)^2 + (GC)^2}$

$\therefore\ FC = \sqrt{(4)^2 + (4)^2}$

$\therefore\ FC = 4\sqrt{2}\ cm$

$\because\ \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FB}$ ، $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FG}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{EF} \perp (BCGF)$

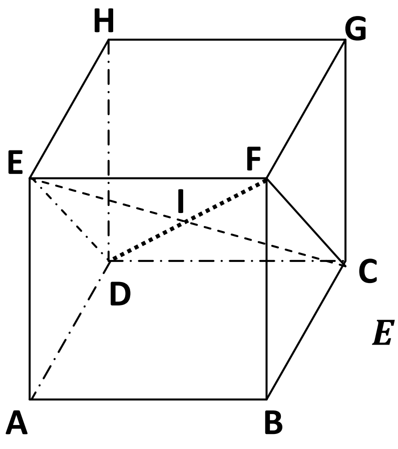
$\therefore\ \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FC}$

$\therefore\ EC = \sqrt{(EF)^2 + (FC)^2}$

$\therefore\ EC = \sqrt{(4)^2 + (4\sqrt{2})^2}$

$\therefore\ EC = 4\sqrt{3}\ cm$

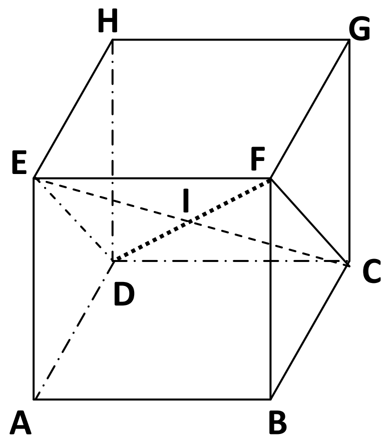
بالمثل $FD = 4\sqrt{3}\ cm$



$\because\ ED = FC = 4\sqrt{2}$ ، $EF = DC = 4$

$\therefore$ $CDEF$ متوازي أضلاع

$\therefore\ EI = \frac{1}{2}\ EC = 2\sqrt{3}\ cm$



(b) ∵ $EC = 4\sqrt{3}\ cm$

، $FD = 4\sqrt{3}\ cm$

، $CDEF$ متوازي أضلاع

∴ $EI = FI$

∴ المثلث EIF متطابق الضلعين

(c) ∵ M منتصف $\overline{EF}$

، $\overline{IM} \perp \overline{EF}$

∵ $KG = \frac{1}{2}\, HG$ ، $MF = \frac{1}{2}\, EF$

∴ $KG = MF$ ويوازيه

∴ $MFGK$ متوازي أضلاع

∵ $m\,(FGK) = 90^{\circ}$

∴ $MFGK$ مستطيل

∴ $\overline{MK} \perp \overline{EF}$

∴ $\overline{EF} \perp \overline{MK}$ ، $\overline{EF} \perp \overline{MI}$

∴ الزاوية $\widehat{IMK}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(EFH, \overline{EF}, EIF)$

(d) ∵ $\overline{EF} \perp (IMK)$

، $\overline{EF} \perp (FCG)$

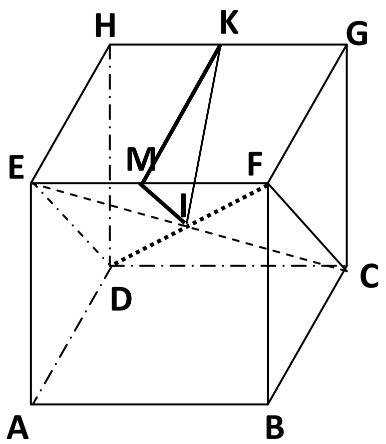
∴ $(FCG) \,//\, (IMK)$

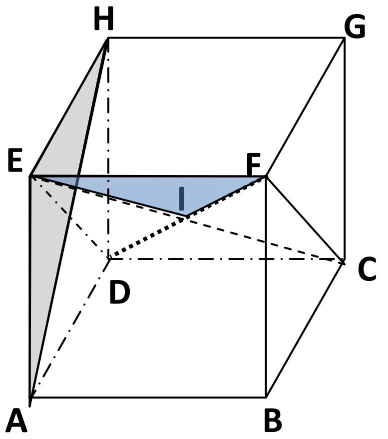
∵ $m\,(CFG) = 45^{\circ}$ خواص المربع

∴ $m\,(IMK) = 45^{\circ\circ}$

∵ $m\,(FGK) = 90^{\circ}$

∴ $MFGK$ مستطيل





(e) $\because$ $\overline{EF} \perp \overline{FG}$ ، $\overline{EF} \perp \overline{BF}$

$\therefore$ $\overline{EF} \perp (FBCG)$

$\because$ $(AEH) \parallel (FBCG)$

$\therefore$ $\overline{EF} \perp (AEH)$

$\because$ $\overline{EF} \subseteq (IEF)$

$\therefore$ $(IEF) \perp (AEH)$

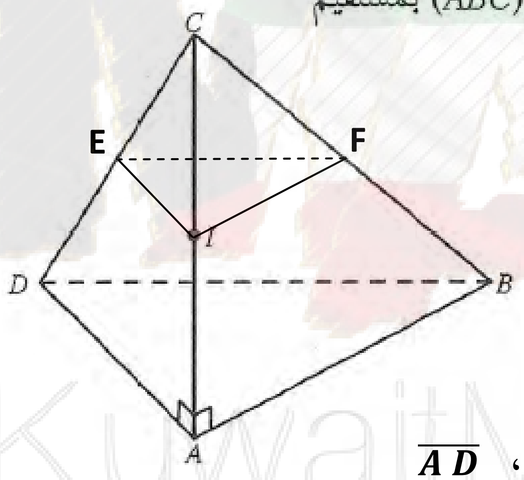
(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:

$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$ ، I منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (ADC)

بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم

يمر في منتصف $\overline{BC}$



$\because$ $\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$

، $\overleftrightarrow{CA} \perp (IFE)$

$\therefore$ $(IFE) \parallel (ABD)$

$\because$ (ACD) قاطع لهما في $\overline{IE}$ ، $\overline{AD}$

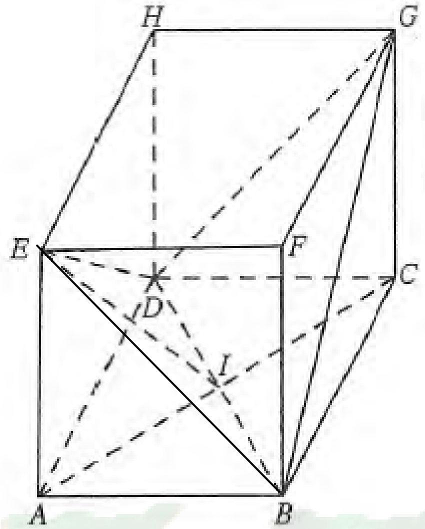
$\therefore$ $\overline{AD} \parallel \overline{IE}$

$\because$ $\frac{CI}{IA} = \frac{CE}{ED} = 1$

$\therefore$ E منتصف $\overline{CD}$ يالمثل

F منتصف $\overline{CB}$

(6) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm



(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.

(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$،

أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$

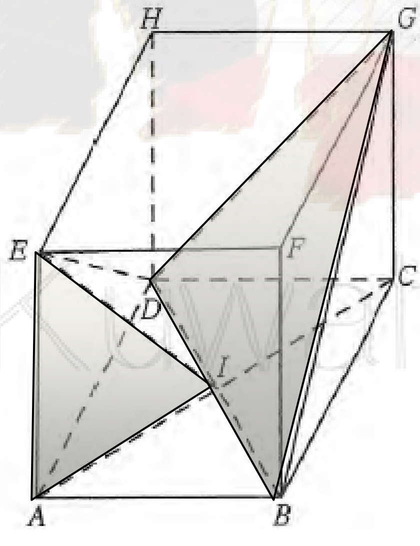
(a) $\because$ $A\,B\,F\,E$ مربع طول ضلعه $5\ cm$

، $\overline{E\,B}$ قطر

$\therefore$ $E\,B = 5\sqrt{2}$ بالمثل

$\therefore$ $E\,D = D\,B = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ المثلث $E\,D\,B$ متطابق الأضلاع



(b) $\because$ I منتصف $\overline{D\,B}$

$\therefore$ $\overline{E\,I} \perp \overline{D\,B}$

$\because$ $\overline{A\,I} \perp \overline{D\,B}$

$\therefore$ $\overline{D\,B} \perp (A\,E\,I)$

$\because$ $\overline{A\,I} \subseteq (\mathrm{D\,B\,G})$

$\therefore$ $(A\,E\,I) \perp (\mathrm{D\,B\,G})$

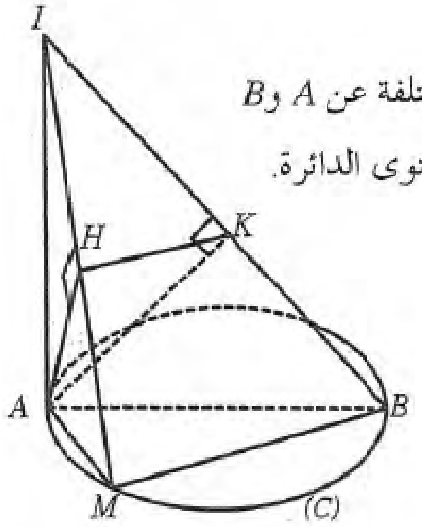
(7) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B

I نقطة على المستقيم العمودي عند A على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$

(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, $\overline{AK} \perp \overline{IB}$ ،
أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$



(a) $\because$ $\overleftrightarrow{AI} \perp (C)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AI} \perp \overleftrightarrow{MB}$

$\because$ $\overleftrightarrow{MB}$ **قطر في الدائرة**

$\therefore$ $m(AMB) = 90^\circ$

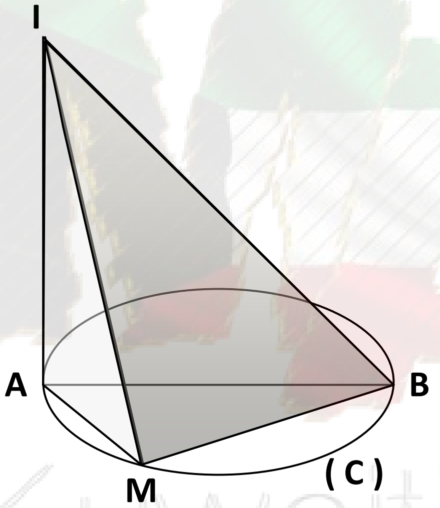
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AI}$ ، $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MB} \perp (\mathrm{AIM})$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MB} \subseteq (\mathrm{IMB})$

$\therefore$ $(\mathrm{IMB}) \perp (\mathrm{AIM})$

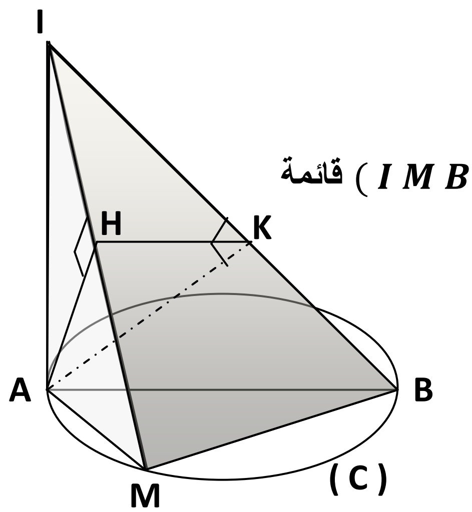


(b) $\because$ $\overline{AK} \perp \overline{IB}$

, $\overline{AH} \perp \overline{IM}$

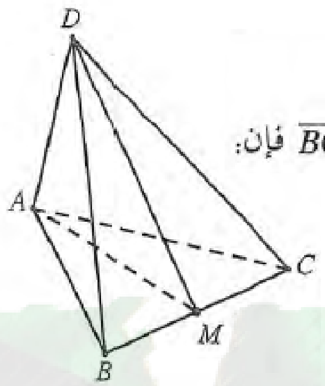
$\therefore$ **الزاوية بين المستويين** (AHK) , (IMB) **قائمة**

$\therefore$ $(IMB) \perp (\mathrm{AHK})$



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



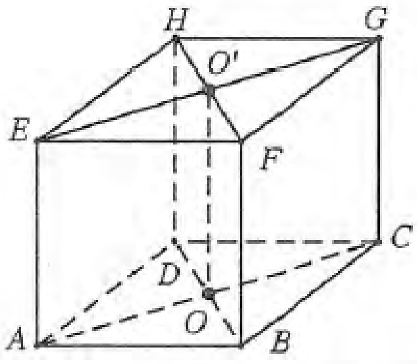
أسئلة التمارين (1–5)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

(1)	$(ABC) \perp (DAC)$	b	
(2)	$(DBC) \perp (DAC)$		a
(3)	$(AMD) \perp (ABC)$	b	
(4)	$(AMD) \perp (DBC)$	b	
(5)	$DC = DB$	b	

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (6–7)، على الشكل المقابل حيث إن:



$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$،

O' مركز المستطيل $EFGH$

(6) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:

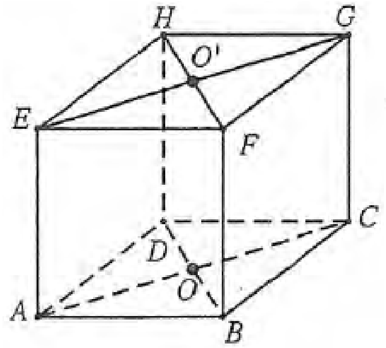
متعامدان (b) متوازيان (c) متطابقان (d) ليس أيًا مما سبق

(7) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:

(a) متوازيان (b) متطابقان متعامدان (d) ليس أيًا مما سبق

أسئلة التمرينين (9–8)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$



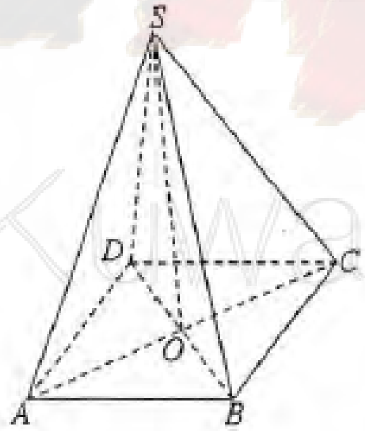
(8) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

(a) متطابقان (b) متعامدان (c) متوازيان (d) ليس أيًا مما سبق

(9) (HGE)، (OAB) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) متطابقان (d) ليس أيًا مما سبق

(10) $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$



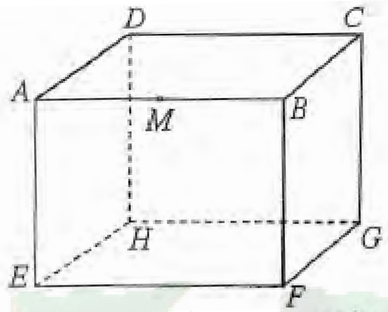
(a) $(SAB) \perp (SBC)$

(b) $(SAC) \perp (SBD)$

(c) $(SAB) \parallel (SCD)$

(d) $(SAD) \perp (ABCD)$

اختبار الوحدة العاشرة



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M

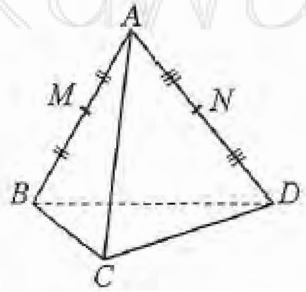
(a) $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M لا تعينان مستوياً واحداً

(b) $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستوياً واحداً

(c) $(ABCD)$ ، $(ABFE)$ ، (EDM)

(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$

أكمل:



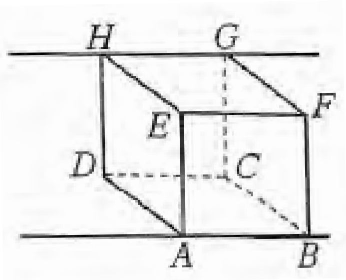
(a) $\overleftrightarrow{BD}$ // $\overleftrightarrow{NM}$

(b) $\overleftrightarrow{M}$ $(ABD)\cap(CNM) =$

(c) $\overleftrightarrow{A}$ $(CNB)\cap(ABD) =$

(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

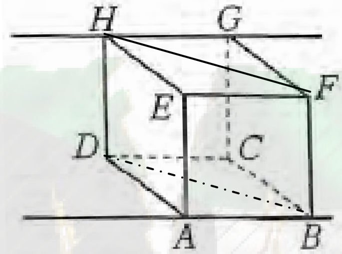


∵ $\overleftrightarrow{E\,F} \;//\; \overleftrightarrow{H\,G}$ خواص المربع

∵ $\overleftrightarrow{E\,F} \;//\; \overleftrightarrow{A\,B}$ خواص المربع

∴ $\overleftrightarrow{H\,G} \;//\; \overleftrightarrow{A\,B}$

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.



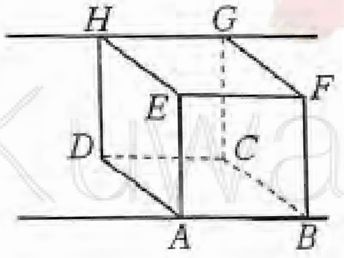
∵ $\overleftrightarrow{D\,H} \;//\; \overleftrightarrow{A\,E}$ خواص المربع

∵ $\overleftrightarrow{A\,E} \;//\; \overleftrightarrow{B\,F}$ خواص المربع

∴ $\overleftrightarrow{D\,H} \;//\; \overleftrightarrow{B\,F}$

∴ $\overline{D\,H} \;//\; \overline{B\,F}$ ويساويه

∴ $B\,D\,H\,F$ متوازي أضلاع



∵ $\overleftrightarrow{D\,H} \perp \overleftrightarrow{D\,A}$ ، $\overleftrightarrow{D\,H} \perp \overleftrightarrow{D\,C}$

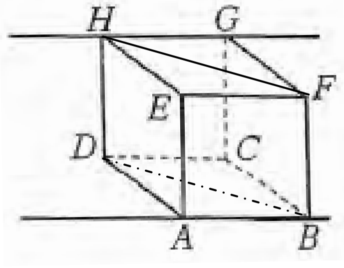
∴ $\overleftrightarrow{D\,H} \perp (\mathrm{A\,B\,C\,D})$

∴ $\overleftrightarrow{D\,H} \perp \overleftrightarrow{D\,B}$

∴ $m\,(\,B\,D\,H) = 90^{\circ}$

∴ $B\,D\,H\,F$ مستطيل

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{HF}$ موازٍ للمستوي $ABCD$



∵ $B\,D\,H\,F$ مستطيل

∵ $\overleftrightarrow{H\,F} \;//\; \overleftrightarrow{D\,B}$ خواص المستطيل

، $\overleftrightarrow{D\,B} \subseteq (\,A\,B\,C\,D\,)$

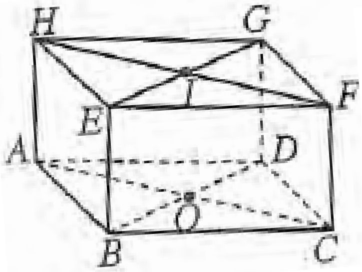
∴ $\overleftrightarrow{H\,G} \;//\; (\,A\,B\,C\,D\,)$

(4) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط: D، G، E تقع في المستوي $EGDB$



$\because$ $\overleftrightarrow{CF} \; // \; \overleftrightarrow{BE}$ **خواص المستطيل**

$\because$ $\overleftrightarrow{DG} \; // \; \overleftrightarrow{CF}$ **خواص المستطيل**

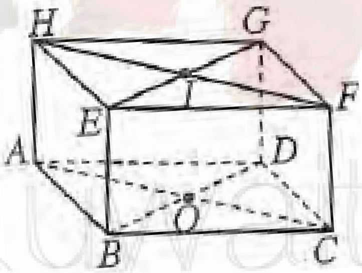
$\therefore$ $\overleftrightarrow{DG} \; // \; \overleftrightarrow{BE}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DG} \; , \; \overleftrightarrow{BE}$ **يعينان مستوٍ وحيد**

$\therefore$ $D \, , G \, , E$ **تقع في مستوٍ واحد**

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) =$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AH} \mathbin{//} \overleftrightarrow{CF} \mathbin{//} \overleftrightarrow{OI}$



$\because$ $\overleftrightarrow{BE} \; // \; \overleftrightarrow{AH}$ **خواص المستطيل**

$\because$ $\overleftrightarrow{BE} \subseteq (B\,E\,G\,D)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AH} \; // \; (B\,E\,G\,D)$

$\because$ $(A\,H\,F\,C) \cap (B\,E\,G\,D) = \overleftrightarrow{OI}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OI} \; // \; \overleftrightarrow{AH}$ **.................. (1)**

$\because$ $\overleftrightarrow{DG} \; // \; \overleftrightarrow{AH}$ **خواص المستطيل**

، $\overleftrightarrow{DG} \; // \; \overleftrightarrow{CF}$ **خواص المستطيل**

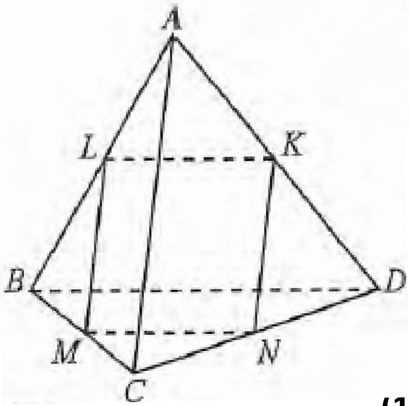
$\therefore$ $\overleftrightarrow{CF} \; // \; \overleftrightarrow{AH}$ **.................. (2)**

من (1) ، (2)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AH} \; // \; \overleftrightarrow{CF} \; // \; \overleftrightarrow{DI}$

(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة؛ L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$، N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$



في المثلث A B C

∵ L **منتصف** $\overline{AB}$ ، M **منتصف** $\overline{BC}$

∴ $\overleftrightarrow{LM} \ // \ \overleftrightarrow{AC}$ **.................. (1)**

في المثلث A C D

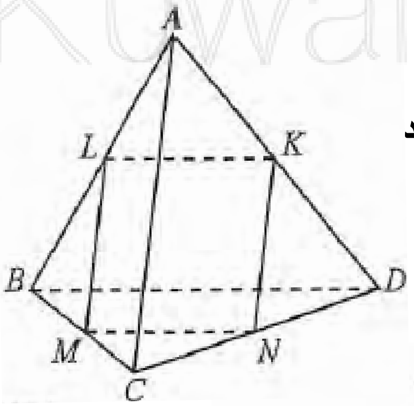
∵ K **منتصف** $\overline{AD}$ ، N **منتصف** $\overline{CD}$

∴ $\overleftrightarrow{KN} \ // \ \overleftrightarrow{AC}$ **.................. (2)**

من (1) ، (2)

∴ $\overleftrightarrow{KN} \ // \ \overleftrightarrow{AC} \ // \ \overleftrightarrow{LM}$

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.



∴ $\overleftrightarrow{KN} \ // \ \overleftrightarrow{LM}$ **بالمثل**

∴ $\overleftrightarrow{LK} \ // \ \overleftrightarrow{MN}$ **وهما يعينان مستوٍ وحيد**

∴ $KLMN$ **متوازي أضلاع**

(c) أثبت أن: $\overline{NL}$ يتقاطع مع $\overline{KM}$

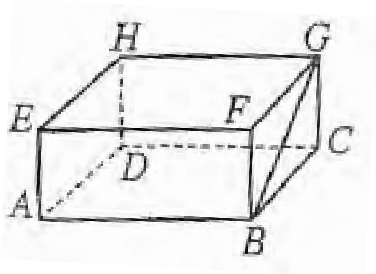
∵ $KLMN$ **متوازي أضلاع**

∴ **القطران ينصف كلاً منهما الآخر**

∴ $\overleftrightarrow{NK}$ **يتقاطع مع** $\overleftrightarrow{KM}$

(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$



∵ $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GF}$ خواص المستطيل

, $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$ خواص المستطيل

∴ $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$, $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GF}$

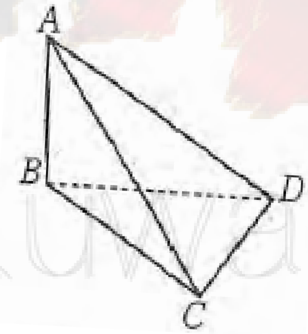
∴ $\overleftrightarrow{GH} \perp (BCGF)$

∵ $\overleftrightarrow{GB} \subseteq (BCGF)$

∴ $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GB}$

(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD

أثبت أن: $m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$



∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

المثلثان A B C , A B D فيهما

∴ $BC = BD$

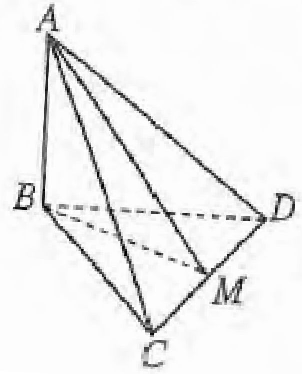
, $\overline{AB}$ ضلع مشترك

, $m(ABC) = m(ABD) = 90^{\circ}$

∴ المثلث ABD $\equiv$ المثلث ABC وينتج أن

$m(ACB) = m(ADB)$

(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$،
M منتصف $\overline{CD}$



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(a) $\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ .... (1)

$\because$ المثلث BCD متطابق الأضلاع ، M منتصف $\overline{CD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ .... (2)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{AM} \subseteq (ABM)$

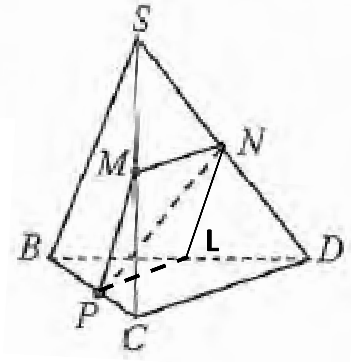
, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$ ، P نقطة على $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

(b) (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overleftrightarrow{PL} // \overleftrightarrow{CD}$



(a) $\because$ M منتصف $\overline{SC}$

، N منتصف $\overline{SD}$

, $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{CD}$

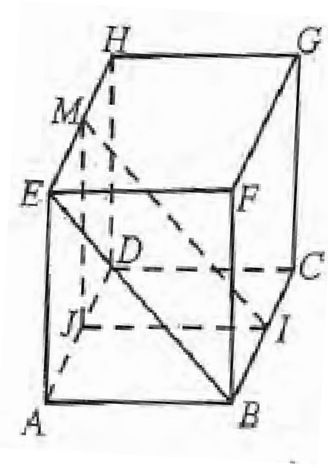
$\because$ $\overleftrightarrow{CD} \subseteq (BCD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MN} // (BCD)$

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{MN} \subseteq (PMN)$

، $(PMN) \cap (BCD) = \overleftrightarrow{PL}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PL} \perp \overleftrightarrow{CD}$



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،
J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$
(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$
(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$
(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان
(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$

(a) $\because$ I, J, M **ثلاث نقاط مختلفة ليست مستقيمة**

$\therefore$ I, J, M **تعين مستوٍ وحيد**

$\because$ M **منتصف** $\overline{EH}$

$\therefore$ $EM = \frac{1}{2} EH$ **بالمثل**

$\therefore$ $AJ = \frac{1}{2} AM$

$\because$ $EH = AM$

$\therefore$ $EM = AJ$ **ويوازيه**

$\therefore$ $AJME$ **متوازي أضلاع**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MJ} \,//\, \overleftrightarrow{EA}$

$\because$ $\overleftrightarrow{EA} \perp \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{MJ}$ **بالمثل**

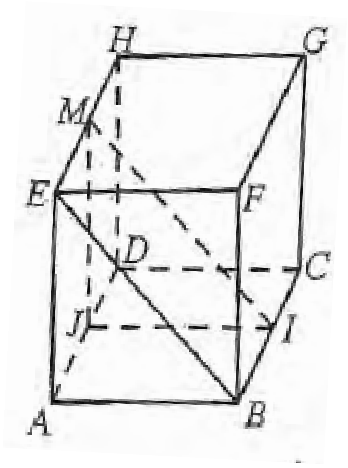
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{JI}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AE}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABE)$



(C) $\because$ $\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$

، $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABE)$

$\therefore$ $(ABE) \ // \ (IJM)$

(d) $\because$ $\overleftrightarrow{IJ} \perp \overleftrightarrow{AD}$

، $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADHE)$ ، $\overleftrightarrow{IJ} \ // \ \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{IJ} \perp (ADHE)$

(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\overleftrightarrow{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

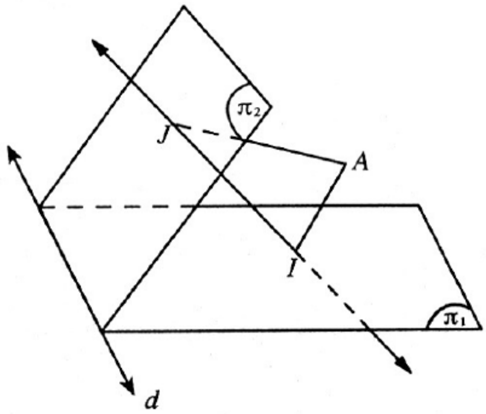
$\overleftrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\overleftrightarrow{AJ} \perp (\pi_2)$

(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

(b) أثبت أن $\overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$



(a) $\because$ $\overleftrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$

، $\overleftrightarrow{AI} \subseteq (AIJ)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AI} \perp (AIJ)$ بالمثل

$\overleftrightarrow{AJ} \perp (AIJ)$

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\overleftrightarrow{d} \subseteq (\pi_1)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AI} \perp \overleftrightarrow{d}$ بالمثل

$\overleftrightarrow{AJ} \perp \overleftrightarrow{d}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$

(c) $\because$ $\overleftrightarrow{IJ} \subseteq (AIJ)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$