الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

مشروع الوحدة: السرعة اللحظية

1 **مقدمة المشروع:** تسقط صخرة من مرتفع. يمكن ضبط زمن السقوط وحساب السرعة المتوسطة لسقوط الصخرة بسهولة، ولكن في لحظة ما أثناء السقوط ما هي سرعة الصخرة؟

2 **الهدف:** معرفة سرعة الصخرة عند اللحظة $t = 2\ s$.

3 **اللوازم:** أوراق رسم، آلة حاسبة علمية، حاسوب، جهاز عرض.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

تسقط الصخرة وفق العلاقة (قانون جاليليو للسقوط الحر): $d(t) = 4.9t^2$ ، حيث:

$d(t)$ المسافة التي تقطعها الصخرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني s

a احسب السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ خلال أول ثانيتين من السقوط.

b أكمل الجدول التالي الذي يمثّل السرعة المتوسطة للصخرة في الفترة الزمنية من اللحظة $t = 2$ إلى اللحظة $t = 2 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق في الزمن.

مدة الفترة الزمنية h بالثانية	السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$
0.4	
0.1	
0.05	
0.01	
0.001	
0.0001	

c ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى معدل السرعة عندما تقترب h كثيرًا من الصفر؟

d ما تقريبًا سرعة الصخرة عند $t = 2$؟

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن النتائج التي حصلت عليها مشيرًا إلى المعطيات من دروس الوحدة التي استفدت منها.

دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز العرض.

دروس الوحدة

النهايات	نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞	صيغ غير معينة	نهايات بعض الدوال المثلثية	الاتصال	نظريات الاتصال	الاتصال على فترة
1−1	1−2	1−3	1−4	1−5	1−6	1−7

الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- رسمت بيان الدالة التربيعية.
- رسمت بيانات دوال القوى.
- وصفت منحنيات كثيرات الحدود.
- أوجدت أصفار دالة كثيرة الحدود.
- تعلمت الكثير من المتطابقات المثلثية.
- رسمت بيانات بعض الدوال.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف مفهوم نهاية دالة عند نقطة.
- حساب نهايات بعض الدوال.
- استخدام نظريات النهايات.
- إلغاء العامل الصفري (صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$).
- نهايات تشمل على ∞، $-\infty$.
- صيغ غير معينة.
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة لإيجاد بعض النهايات.
- تعرف اتصال دالة عند نقطة ودراسة الاتصال.
- تعرف بعض نظريات الاتصال الأساسية.
- بحث اتصال دالة ناتجة من تركيب دالتين.
- فهم معنى دالة متصلة على فترة.
- تعرف اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

نهاية دالة عند نقطة – النهاية من الجهتين – النهاية من جهة واحدة – العامل الصفري – صيغ غير معينة – نظرية الإحاطة – خط مقارب (محاذي) رأسي – خط مقارب (محاذي) أفقي – اللانهاية– اتصال دالة عند نقطة – نقاط الاتصال ونقاط الانفصال – التخلص من الانفصال – دالة مركبة – اتصال دالة على فترة.

أضف إلى معلوماتك

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر، كان الباحثون في الرياضيات قد أدركوا أنه بدون أسس منطقية، سيكون حساب التكامل والتفاضل محدودًا. طوّر أوغوستين لويس كوشي (Augustin–Louis Cauchy) نظرية في النهايات، فألغى معظم الشكوك حول صحة منطق حساب التكامل والتفاضل.

وصف المؤرخ هوارد إيف (Howard Eves) كوشي بأنه إضافة إلى كونه عالمًا رياضيًّا من الطراز الأوّل قدم الكثير لعالم الرياضيات فقد كان أيضًا محاميًّا (مارس المهنة لمدة أربعة عشر عامًا)، ومتسلق جبال، ورسام (استخدم الألوان المائية). ومن صفات كوشي التي ميزته عن معاصريه احترامه للبيئة ودفاعه عنها.

أوغوستين لويس كوشي
(Augustin–Louis Cauchy)

1–1

النهايات

Limits

سوف تتعلم

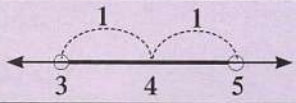
- النهاية عند النقطة.
- حساب النهايات من التمثيلات البيانية.
- حساب النهايات باستخدام النظريات.
- النهاية من جهة واحدة فقط أو من الجهتين.
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

المفردات والمصطلحات:

- جوار Neighbourhood
- المعيار Norm
- جوار ناقص Punctured Neighbourhood
- النهاية من جهة واحدة One–Sided Limit
- النهاية من الجهتين Two–Sided Limits
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$ Indeterminate Form $\frac{0}{0}$

عمل تعاوني

أوّلًا: أكمل الجدول التالي كما في **1** :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الأعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بُعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3,5)$	4		$(4-1,4+1)$	1
2	$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$				
3	$\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$				
4	$(0,1)$				
5	$(2.9, 3.1)$				
6	$(6.8, 7.2)$				

ثانيًا: اكتب الفترة المفتوحة التي يبعد طرفاها بمقدار $\frac{1}{5}$ عن العدد الحقيقي 3.

ثالثًا: اكتب فترة مفتوحة يبعد طرفاها بمقدار a عن العدد الحقيقي c.

من «العمل التعاوني» السابق، **الفترة المفتوحة $(c-a\ ,\ c+a)$ تسمّى جوارًا للعدد c وفقًا للمعيار a حيث $a > 0$.**

فمثلًا: الفترة المفتوحة $(3, 5)$ هي جوار للعدد 4 وفقًا للمعيار 1.

والفترة $\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{4}$.

وكذلك الفترة $\left(1\frac{99}{100}, 2\frac{1}{100}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{100}$.

وعليه يمكننا تحديد جوار لأي عدد باختيارنا معيارًا مناسبًا.

إذا كانت لدينا دالة معرّفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية وتحوي العدد c فإننا نقول إن هذه الدالة معرّفة في جوار للعدد c (أي I تحوي جوارًا للعدد c).

أما إذا كانت الدالة معرّفة عند جميع عناصر الفترة I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه فإن الدالة تكون معرّفة في جوار ناقص للعدد c.

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

نهاية دالة عند نقطة

نشاط

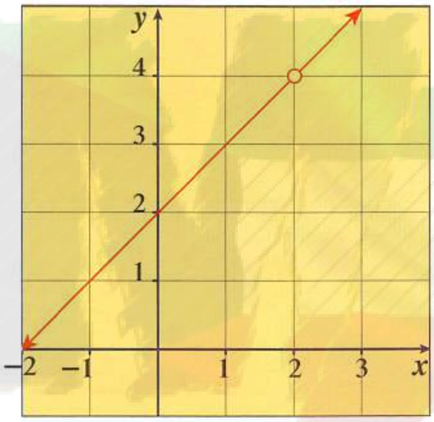
أولًا: لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

a أوجد مجال الدالة f.

b هل يمكن إيجاد $f(2)$ ؟

c أكمل الجدول التالي:

x	…	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\xrightarrow{\quad}$ …	2	… $\xleftarrow{\quad}$	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						



d ماذا تلاحظ على قيم x؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$ ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f ؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x)=x+2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين f , g.

من النشاط السابق وجدت أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 كلما كانت x قريبة جدًّا من العدد 2 سواء من اليمين أو اليسار. يسمى العدد 4 **نهاية الدالة f** عندما x تؤول إلى العدد 2. (تقترب باطراد من العدد 2 , $2 \neq x$)

ويعبّر عن ذلك بالصورة التالية:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

وتقرأ كالتالي: نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 2 تساوي 4.

The limit of $f(x)$ as x approaches 2 equals 4

تعطينا النهايات لغة لوصف سلوك الدالة عندما تقترب مدخلات الدالة من قيمة معينة.

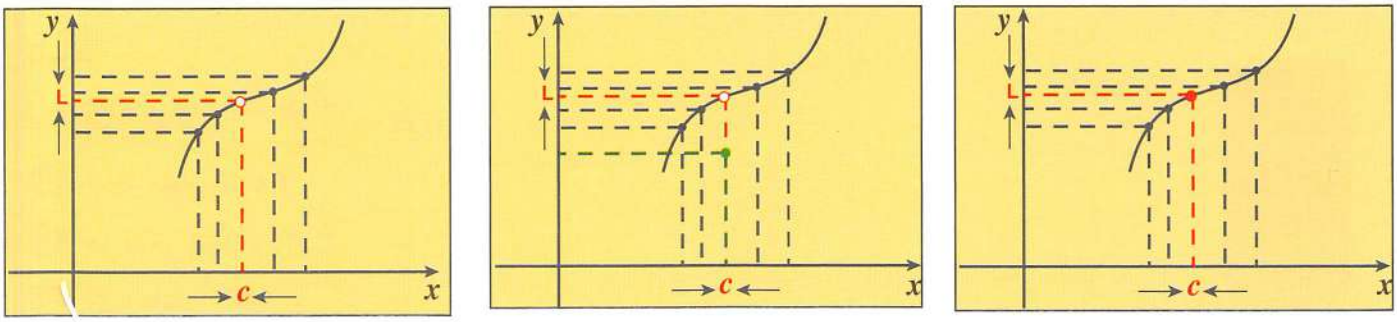
تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

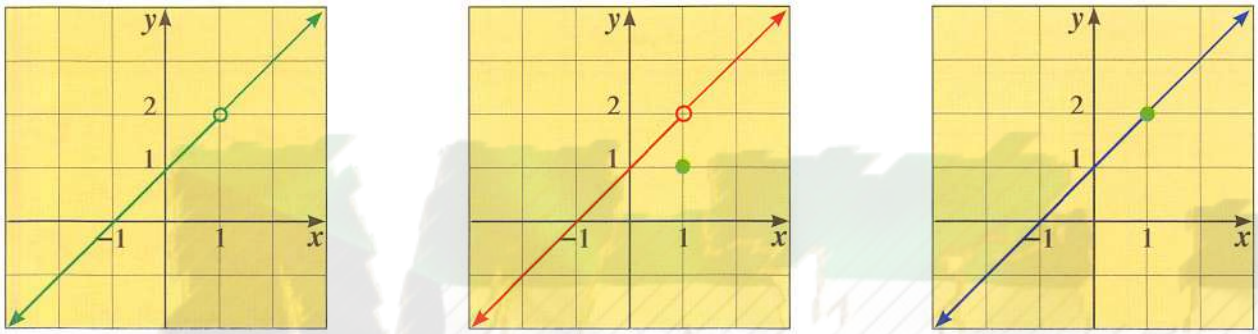
نكتب: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

تبيّن الأشكال أدناه حقيقة وجود نهاية عندما $x \to c$ حيث لا تعتمد على كون الدالة معرّفة أو غير معرّفة عند c.



فعلى سبيل المثال في الدوال التالية:



a $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : \ x \neq 1 \\ 1 & : \ x = 1 \end{cases}$

c $q(x) = x + 1$

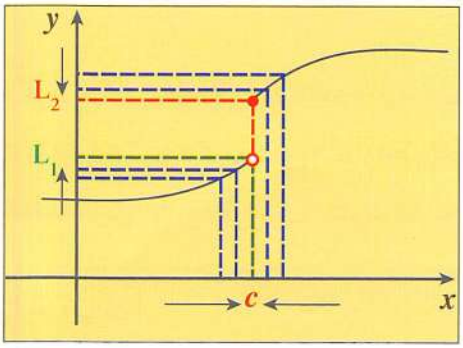
الدالة f لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أن f ليست معرّفة عند $x = 1$

الدالّة g لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أنّ $g(1) \neq 2$

الدالّة q لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ ، $q(1) = 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} q(x) = 2$$

النهاية من جهة واحدة أو من جهتين One–Sided Limit and Two–Sided Limits



شكل (1)

أحيانًا تؤول قيم الدالة f لقيم مختلفة عندما تقترب x من عدد c من الجهتين.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليسار

فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_1$

وتسمى **النهاية من جهة اليسار.**

وإذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليمين فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_2$

وتسمى **النهاية من جهة اليمين.**

نلاحظ في الشكل (1): $L_1 \neq L_2$

أي أن: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

ولذا نقول أن: $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

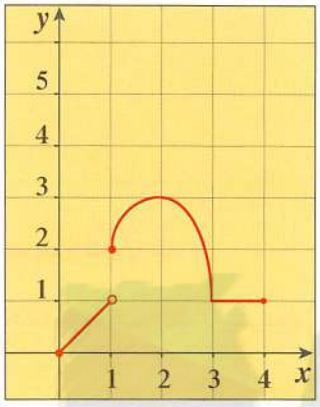
نظرية (1)

يفرض أن c , L عددين حقيقيين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)



الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ldots$

2 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ldots$

3 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ldots$

4 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ldots$

5 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ldots$

6 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ldots$

7 $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\ldots$

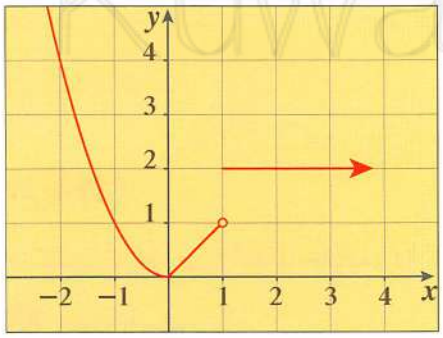
8 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ldots$

9 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ldots$

10 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ldots$

11 $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ldots$

مثال (1)



الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

1 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

4 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

الحل:

1 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2 $\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 \implies \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

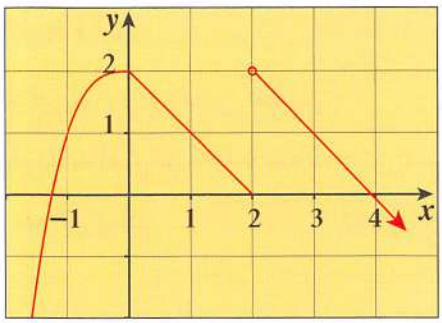
3 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

4 $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 4$

حاول أن تحل

1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



a $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

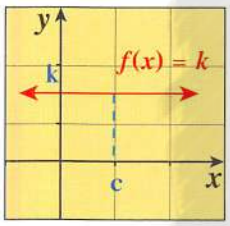
b $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

حساب النهايات Calculation of Limits

يمكننا حساب النهايات لبعض الدوال باستخدام النظريات التالية:

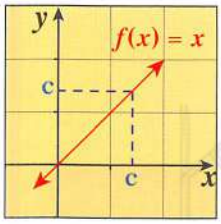


شكل (2)

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k , c عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$



شكل (3)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًّا فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

b قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

c قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to c} f(x) = k \cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

أوجد:

a $\lim_{x\to 1}(f(x) - g(x))$ b $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$ c $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

الحل:

a
$$\lim_{x\to 1}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$$
$$= -2 - 5$$
$$= -7$$

b $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $5 \neq 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1} 2f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{2\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}$$
$$= \frac{2(-2)}{5}$$
$$= \frac{-4}{5}$$
$$= -0.8$$

c
$$\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)$$
$$= -2\times 5$$
$$= -10 \quad , \quad -10 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1}(g(x)+4)}{\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1} 4}{\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)}$$
$$= \frac{5+4}{-10}$$
$$= -\frac{9}{10}$$
$$= -0.9$$

حاول أن تحل

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x) + g(x))$ b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبيّة

Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

ملاحظة: يمكن تطبيق نظرية **a** 5 على الدوال التي على الصورة: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ ومجالها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$ **b** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ **c** $\lim_{x \to 3} (x^2(2 - x))$

الحل:

a $\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5$ نظرية (5)

$= 1 + 2 + 5$

$= 8$

b $g(x) = x + 2$ تحقق من أن المقام $\neq 0$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \quad , \quad 4 \neq 0$ أي أن المقام $\neq$ صفر

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{2 + 2}$ نظرية(5)

$= \frac{4 + 4 + 4}{4}$

$= \frac{12}{4}$

$= 3$

c $\lim_{x \to 3} (x^2(2 - x)) = \lim_{x \to 3} (2x^2 - x^3)$ نظرية (5)

$= 2(3)^2 - (3)^3$

$= 18 - 27$

$= -9$

حاول أن تحل

3 **a** هل يمكن حل **c** في المثال (3) بطريقة أخرى؟

b أوجد:

1 $\lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$ **2** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

نظريات حساب النهايات صحيحة عند حساب النهاية من جهة واحدة.

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \dfrac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+2)=3(1)+2=5$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{5}{x}=\frac{5}{1}=5$$

(يمكن التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$)

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=5$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases}x^2-2 & : x\leqslant 0\\ 1-2x & : x>0\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-2x)=1$$

$$\because \lim_{x\to 0^+} g(x)\neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة

حاول أن تحل

5 إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases}x^3+x & : x>1\\ \dfrac{x}{x^2+1} & : x\leqslant 1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

تذكر:

$$|x-a| = \begin{cases} x-a : x \geqslant a \\ -x+a : x < a \end{cases}$$

تدريب (2)

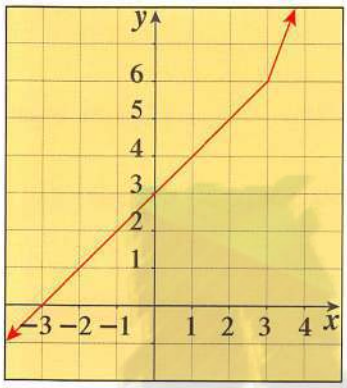
لتكن $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ حيث $x \neq 1$

a اكتب $f(x)$ بدون استخدام رمز القيمة المطلقة. (بإعادة تعريف المطلق)

b أوجد $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c هل للدالّة f نهاية عندما $x \to 1$؟ فسّر.

مثال (6)



لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$؟

الحل:

a $$f(x) = \begin{cases} x-3+2x & : x \geqslant 3 \\ -x+3+2x & : x < 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-3 & : x \geqslant 3 \\ x+3 & : x < 3 \end{cases}$$

b $$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (3x-3) = 3(3)-3 = 6$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

c $$\because \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

$\therefore$ للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ وهذه النهاية تساوي 6.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$؟

الربط بالحياة:

يقدّر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم. ويستخدمون النهايات لتوقع عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.

قاعدة القوة

تعلمت مما سبق أن

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2}(x+1)^2 = \lim_{x\to 2}((x+1)\cdot(x+1))$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)\cdot\lim_{x\to 2}(x+1) = (3)^2$$
$$\lim_{x\to 2}(x+1)^3 = \lim_{x\to 2}((x+1)^2(x+1))$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)^2\cdot\lim_{x\to 2}(x+1) = (3)^2\cdot 3 = 3^3$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة $\lim_{x\to 2}(x+1)^n$ حيث n عددًا صحيحًا موجبًا وهي تساوي $(3)^n$.

نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$

b $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c > 0$)

c $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

ملاحظة: سنكتفي بدراسة حالات الجذور التربيعية والتكعيبية للدوال فقط.

مثال (7)

أوجد:

a $\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$ b $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$ c $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

الحل:

a $\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5 = \left(\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)\right)^5 = 3^5 = 243$

b $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x-3)}$
$= \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

c $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

$\lim_{x\to 3}(x-2) = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$ تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 3}(3x^2-2) = 25 \quad , \quad 25 > 0$ تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر > 0

$\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(3x^2-2)} = \sqrt{25} = 5$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim_{x\to 3}(x-2)}$$
$$= \frac{5}{1} = 5$$

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$ b $\lim\limits_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$ c $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

إلغاء العامل الصفري في المقام

Eliminating Zero Factor of the Denominator

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوي الصفر عندما $x \to c$ فإننا نطبّق نظرية (4) فرع e لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفري المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

1 عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة (Indeterminate Form)**.

2 يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

تذكر:

مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددًا نسبيًّا.

أمثلة:

- $\sqrt{2}-1$ ، $\sqrt{2}+1$ مترافقان
- $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$ b $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^3-8}{x}$ c $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

الحل:

a عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{\cancel{(x-1)}^{1}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}_{1}}$$

$$=\frac{x+2}{x}\quad,\quad x\neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}$$

$$\because\ \lim_{x\to 1}x=1\quad,\quad 1\neq 0$$

عوّض عن x بـ 1

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

تذكر:

إذا كان a صفر للدالة الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$.

b عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$$\frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2\right)}{x}$$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$= \frac{\cancel{x}^{1}(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}^{1}}$$

$$= x^2+6x+12 \quad , \quad x \neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2+6x+12) = 12$$

c عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّل المقام إلى عوامل

$(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x-1}^{1}}{\cancel{(x-1)}_{1}(x+1)} & : \ x>1 \\ \dfrac{\cancel{1-x}^{-1}}{\cancel{(x-1)}_{1}(x+1)} & : \ x<1 \ , \ x\neq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & : \ x>1 \\ \dfrac{-1}{(x+1)} & : \ x<1 \ , \ x\neq -1 \end{cases}$$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

نتحقق من نهاية المقام $\neq 0$

$$\because \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2 \quad , \quad 2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليمين)

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -(1+1) = -2 \quad , \quad -2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليسار)

$$\therefore \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)} = \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

تذكر:

$a^3-b^3 =$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 =$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

حاول أن تحل

8 أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

b $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

c $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x+2|-7}{x^2-25}$

مثال (9)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$ b $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ c $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

الحل:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2$

$$=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$(x-2)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

$$=\frac{2(\cancel{x-2})^{1}}{(\cancel{x-2})_{1}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}\quad,\quad x\neq 2$$

تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)=1\ ;\ 1>0$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)=\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1$$

تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}+1=1+1=2\quad,\quad 2\neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

b $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

حلّل البسط: الفرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})^{1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})_{1}}$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\quad,\quad x\neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to 1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x}+1$$

عوّض عن x بـ 1

$$=1+1+1=3$$

معلومة:

$x-a=$
$(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$
حيث $x\geqslant 0\ ,\ a\geqslant 0$
$x-a=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})$
$(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$
$x+a=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})$
$(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

c $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$= \frac{(x^2-4)\times\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a} = a$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}^{1}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}_{1}}$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$= (x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2} \quad , \quad x \neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \lim_{x\to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\sqrt[3]{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}$$

$$= (-2-2)\cdot\sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$= (-4)\times(0) = 0$$

حاول أن تحل

9 أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ **b** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$ **c** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

مثال (10)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$ **b** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x+2}$

الحل:

a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

عند التعويض عن x بـ -1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

أقسم البسط على المقام ونوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

-1	1	6	2	-3
		-1	-5	3
	1	5	-3	0

الناتج: x^2+5x-3 والباقي صفر

$$\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=x^2+5x-3 \quad , \quad x\neq -1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)$$

عوّض عن x بـ -1

$$=(-1)^2+5(-1)-3$$

$$=-7$$

b $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}$

$$\frac{x^5+32}{x+2}$$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5+32=x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+32$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

-2	1	0	0	0	0	32
		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

الناتج: $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5+32}{x+2}=x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \quad , \quad x\neq -2$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

عوّض عن x بـ -2

$$=(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16$$

$$=16+16+16+16+16$$

بسّط

$$=80$$

حاول أن تحل

10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$

b $\lim_{x\to 2}\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

Limits Involving $-\infty$, ∞

سوف تتعلم

- نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$.
- نهايات غير محددة عندما $x \to a$.
- الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية.

المفردات والمصطلحات:

- نهاية محددة Finite Limit
- خط مقارب أفقي Horizontal Asymptote
- خط مقارب رأسي Vertical Asymptote

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

a أكمل الجدول التالي:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
-100		
$-3\,000$		
$-60\,000$		
100		
$3\,000$		
$60\,000$		

b استنتج قيم الدوال الواردة أعلاه عندما تأخذ x قيمًا موجبة كبيرة جدًّا وعندما تأخذ x قيمًا سالبة صغيرة جدًّا.

أوّلًا: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$ Finite Limits as $x \to \pm\infty$

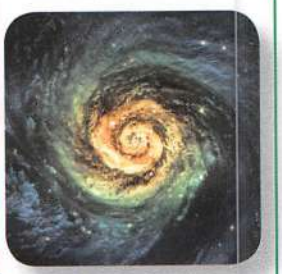
إذا كانت x تأخذ قيمًا كبيرة جدًّا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرّك مبتعدة كثيرًا جهة اليمين على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to \infty$.

وإذا كانت x تأخذ قيمًا صغيرة جدًّا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرّك مبتعدة كثيرًا جهة اليسار على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to -\infty$.

معلومة:

من الأزل إلى الأبد

- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.



تعريف (3)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a, ∞) فإن:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.

تعريف (4)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty, a)$ فإن:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.

في الشكل (1) من بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$

نجد أن:

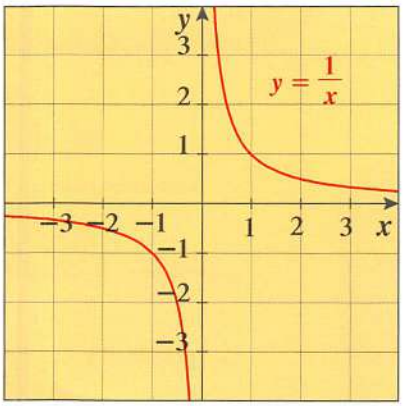
عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

أي أنه : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$



شكل (1)

نظرية (7)

لتكن f: $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

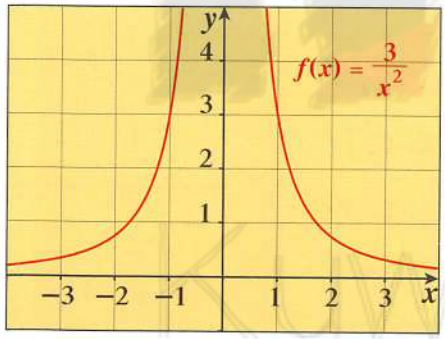
تدريب

الشكل يمثّل بيان الدالة f : $f(x) = \frac{3}{x^2}$

أكمل ما يلي:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} = \text{.....}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = \text{.....}$$



نظرية (8)

لتكن f : $f(x) = \frac{k}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

فمثلًا: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^4} = 0$, ...

تبقى النظريات (c , a) 6, (4), (2) صحيحة عند إيجاد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

مثال (1)

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$ c $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

الحل:

a $\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0$

$\because \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 1+0 = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$ تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (1)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)}$

$= 0 \times \frac{1}{1+0} = 0$

b $\frac{x+5}{x^2+25} = \frac{\cancel{x}^{1}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x^2}_{x}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}} \quad , \quad x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}}\right)\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{25}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{25}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{25}{x^2} = 1+0 = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$ ، تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{25}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{25}{x^2}\right)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 1+0 = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$

c $\frac{6x^3}{5-7x^3} = \frac{6\cancel{x^3}^{1}}{\cancel{x^3}_{1}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)} = \frac{6}{\frac{5}{x^3}-7} \quad , \quad x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{5}{x^3}-7}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5}{x^3}-7\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^3} - \lim\limits_{x\to\infty} 7 = 0-7 = -7 \quad , \quad -7 \neq 0$ ، تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^3} = 0$

نظرية (4)

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{5}{x^3}-7} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)}$$

$$= \frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$$

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x-2}$

b $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$

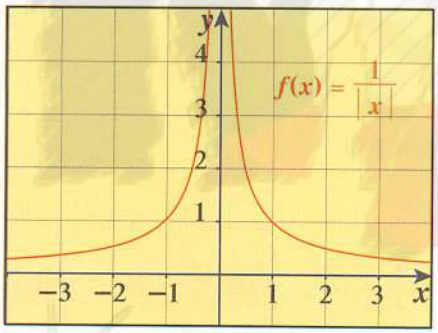
c $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

ثانيًا: نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$ — Infinite Limits as $x \to c$

لنعتبر على سبيل المثال الدالتين:

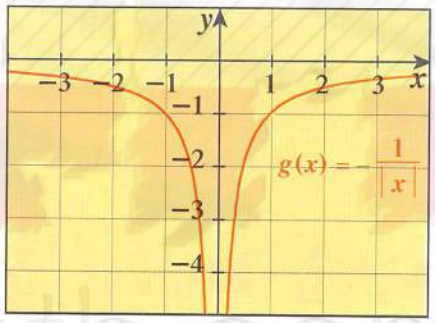
$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad , \quad g(x) = \frac{-1}{|x|}$$

والممثلتين بيانيًّا بالمنحنيين المرسومين



شكل (2)

$f(x) = \frac{1}{|x|}$



شكل (3)

$g(x) = \frac{-1}{|x|}$

نلاحظ من الشكل (2) أن قيم $f(x)$ تزداد بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار لذلك فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة لأنها تتزايد بلا حدود.

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

ويجب أن ندرك أن الرمز ∞ لا يعني قيمة معينة. (لا يمثل عددًا حقيقيًّا).

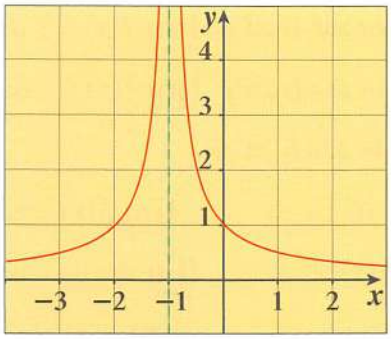
وإنما يفيد أن الدالة f : $f(x) = \frac{1}{|x|}$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to 0$

وبالمثل نرى أن الدالة g : $g(x) = \frac{-1}{|x|}$ الممثلة بيانيًّا بالشكل (3) تتناقص بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي عندما $x \to 0$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة لأنها تتناقص بلا حدود.

ونعبر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$$

نشاط

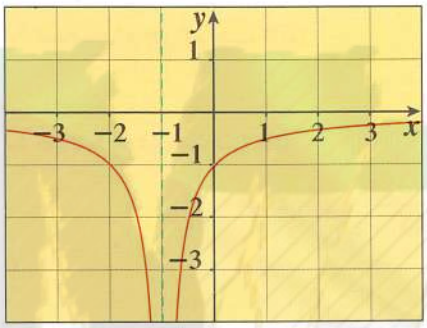


شكل (4)

$$f(x) = \frac{1}{|x+1|}$$

من شكل (4) قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to -1$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{1}{|x+1|} = \dots\dots\dots\dots$$



شكل (5)

$$g(x) = \frac{-1}{|x+1|}$$

من شكل (5) قيم $g(x)$ تتناقص بلا حدود عندما $x \to -1$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{-1}{|x+1|} = \dots\dots\dots\dots$$

تعريف (5)

1. إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بالتالي:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

2. إذا كانت قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بالتالي:

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

نظرية (9)

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \iff \left(\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \infty\right)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty\right)$$

ملاحظات

1. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+b] = \pm\infty$
2. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)] = \pm\infty$

   وإذا كان b عدد حقيقي سالب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)] = \mp\infty$
3. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$, $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \infty$
4. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$, $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = -\infty$
5. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = -\infty$

نظرية (10)

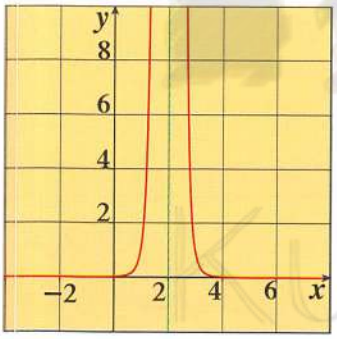
إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

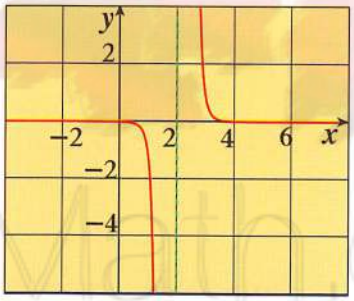
إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

1. $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{1}{(x-c)^n} = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

حيث $c \in \mathbb{R}$



$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^6} = \infty$$



$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^7} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^7} = -\infty$$

مثال (2)

أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}$

الحل:

$$\frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & : x > 2 \\ \frac{-1}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = \infty \qquad (1) \qquad \text{نظرية}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left(-1\cdot\frac{1}{x-2}\right)$$

نظرية

$$\because \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty \ , \ -1 < 0$$

استخدم ملاحظة (2)

$$\therefore \lim_{x\to 2^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x-2}\right) = \infty \qquad (2)$$

من (2) , (1)

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$

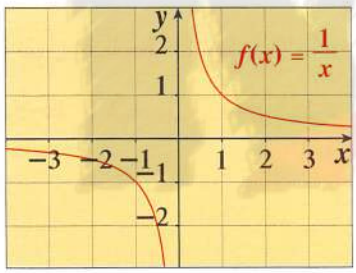
حاول أن تحل

2 أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to -1} \frac{3}{|x+1|}$

تعريف (6): الخط المقارب (المحاذي) الأفقي Definition of Horizontal Asymptote

الخط $y = b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y = f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = b$$

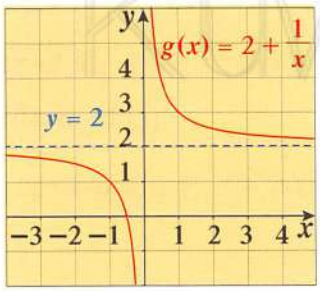


شكل (6)

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0 \ , \ \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي (أو محاذي أفقي) لمنحنى الدالة f . (الشكل (6))



شكل (7)

وكذلك بالنظر إلى بيان الدالة g : $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

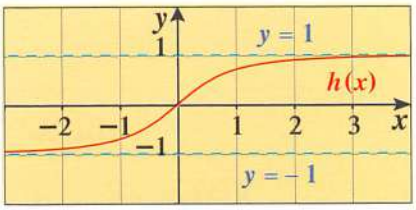
$$\lim_{x\to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \ , \ \lim_{x\to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 2$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة g . (الشكل (7))

ونلاحظ أنه إذا كان $\lim_{x\to \infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} g(x)$ فإن الخط المقارب الأفقي وحيد وهو $y = b$.

قد يكون لمنحنى الدالة أكثر من خط مقارب أفقي.

فمثلًا:



شكل (8)

لمنحنى الدالة h : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ في الشكل المقابل خطان مقاربان أفقيان هما:

$y = 1$ و $y = -1$

لاحظ أن: $h(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ (الشكل (8))

ملاحظة:

ستقتصر دراستنا على المحاذيات الأفقية لدوال الحدوديات النسبية.

تعريف (7): الخط المقارب (المحاذي) الرأسي — Definition of Vertical Asymptote

الخط $x = a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y = f(x)$ إذا توفر على الأقل أحد الشروط التالية:

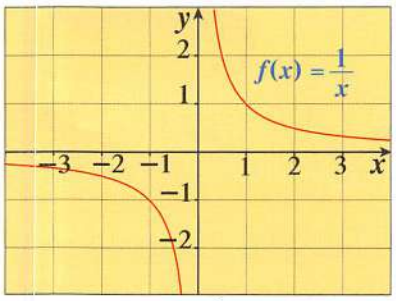
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x = 0$ هو خط مقارب (محاذي) رأسي لمنحنى الدالة f .
(الشكل (9))



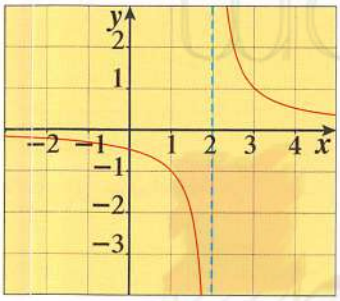
شكل (9)

بالنظر إلى بيان الدالة f: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x = 2$ هو خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (10))

نلاحظ أن $x = 2$ هو صفر المقام.



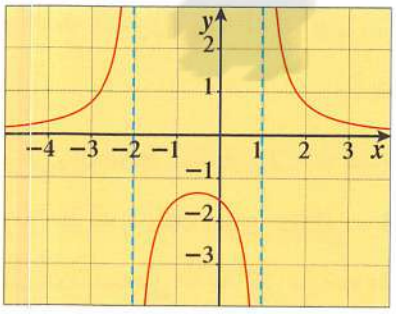
شكل (10)

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$

نلاحظ أن: $x = 1$, $x = -2$ هما مقاربان (محاذيان) رأسيان لمنحنى الدالة f .
(الشكل (11))

ونلاحظ أيضًا أن 1 , -2 هما صفرا للمقام.



شكل (11)

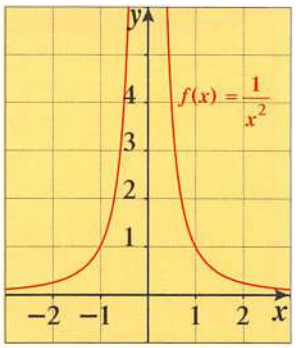
$f(x) = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$

ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث h , g كثيرتي حدود وليس بينهما عوامل مشتركة، فإن لكل صفر c لدالة المقام h يكون المستقيم $x = c$ خطًّا مقاربًا رأسيًّا (أو محاذيًا رأسيًّا).

أما في حالة وجود عوامل مشتركة بين h , g فيكون المحاذي الرأسي عند صفر (أصفار) المقام بعد التبسيط.

مثال (3)



أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والخطوط المقاربة الأفقية لكل مما يلي:

a $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ b $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$

الحل:

a

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

صفرا المقام هما: -2 , 2 وليست أصفارًا للبسط.

∴ المستقيمان $x = -2$, $x = 2$ هما المقاربان الرأسيان لمنحنى الدالة g.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1) - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

∴ المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى g.

b

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$$

نضع $h(x)$ في أبسط صورة

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} \quad , \quad x \neq 1$$

2 صفرًا للمقام وليس من أصفار البسط

∴ المستقيم $x = 2$ خط مقارب رأسي لمنحنى h

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

∴ المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي المنحنى h

حاول أن تحل

3 أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية و الخطوط المقاربة الأفقية لمنحنيات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 9}$ b $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

سوف تتعلم

- صيغ غير معينة

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$, $\infty - \infty$

المفردات والمصطلحات:

- صيغة غير معينة

Indeterminate Form

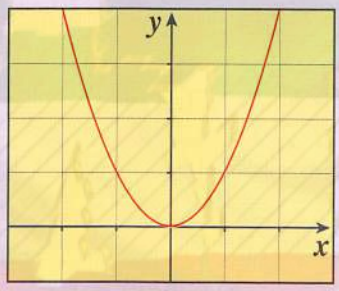
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث: $f(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه:

أكمل ما يلي:

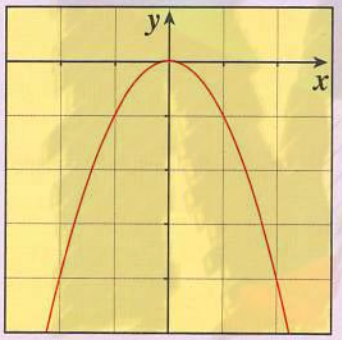
1 n عددًا زوجيًّا , $a > 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

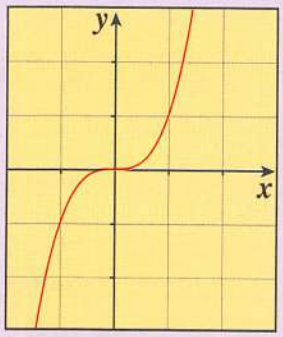
2 n عددًا زوجيًّا , $a < 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

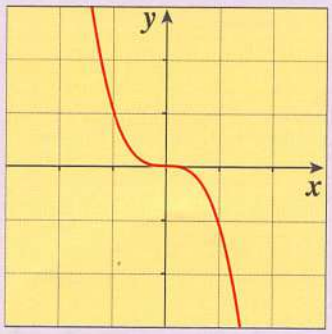
3 n عددًا فرديًّا , $a > 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

4 n عددًا فرديًّا , $a < 0$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

تذكر:

إذا كانت:

$f(x) = ax^n$

$n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$

فإن:

درجة الدالة هي n ومعاملها الرئيسي a.

معلومة:

أنواع من الصيغ غير المعينة:

$\frac{0}{0}$, $(0)^0$

$(\infty)^0$, $(0 \times \infty)$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

لتكن: $f(x) = ax^n \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \in \mathbb{R}^*$:

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases} \ ، \ \lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \quad a > 0 \\ \infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

فمثلًا:

$$\lim_{x \to \infty} (-x^5) = -\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} (5x^7) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (-4x^4) = -\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} (5x^2) = \infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{3} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-4x) = \infty \ , \ \lim_{x \to \infty} (-3x^4) = -\infty$$

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \ , \ a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية: $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها **صيغ غير معينة.**

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا **صيغة غير معينة.**

في الحالات السابقة نلجأ لبعض الأساليب الجبرية لحساب قيمة هذه النهايات والأمثلة والنظريات التالية ستوضح كيفية حساب مثل هذه النهايات.

مثال (1)

أوجد: $\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1)$

الحل:

بالتعويض المباشر

$$\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to \infty} 2x^2$$
$$= \infty$$

حاول أن تحل

1 **أوجد:** $\lim_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

مثال تمهيدي

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x}{4x^2+5}$ **b** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x}$

الحل:

a لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذا سنلجأ للحل التالي:

أقسم كلًّا من البسط والمقام على x^2

$$\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}} \qquad x \neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 4+0 = 4 \quad , \quad 4 \neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 3-0 = 3$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

b لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذلك نقسم كلًّا من البسط والمقام على x^4 (أكبر قوة لـ x).

$$\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}}$$

التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right) = 3-0 = 3 \quad , \quad 3 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0-0}{3-0} = 0$$

نلاحظ من المثال التمهيدي **a** أن درجة الحدودية في البسط تساوي درجة الحدودية في المقام تساوي 2 وأن نهاية الدالة النسبية تساوي $\frac{3}{4}$

وهو **ناتج قسمة معامل x بأكبر قوة في البسط على معامل x بأكبر قوة في المقام.**

ونلاحظ في المثال التمهيدي **b** أن درجة الحدودية في البسط **أصغر من** درجة الحدودية في المقام وأن نهاية الدالة النسبية تساوي 0

نستطيع تعميم ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0$$ فإن:

a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \ : \ n = m$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ : \ n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$ b $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x}$ c $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}$

الحل:

a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3x^3 + 4}{2x^3 + 5}$

$= \frac{-3}{2}$

نظرية: $n = m = 3$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x} = 0$

نظرية: $n < m$, $m = 4$, $n = 2$ (درجة حدودية البسط أصغر من درجة حدودية المقام)

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4} = -\frac{1}{2}$

نظرية: $n = m = 4$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$ b $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$

مثال (3)

إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

الحل:

$\because \lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3 \ , \ 3 \neq 0$

∴ درجة الحدودية في البسط يجب أن تكون مساوية لدرجة الحدودية في المقام أي أن الحدودية في البسط يجب أن تكون من الدرجة الأولى.

$$ax^2 = 0 \implies a = 0$$

ومنه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{bx+3}{2x+5}$$

$$= \frac{b}{2}$$

نظرية $m = n = 1$

$$\because \frac{b}{2} = 3 \implies b = 6$$

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

مثال (4)

أوجد: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

الحل:

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\cancel{x}^{1}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}^{1}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

عندما $x > 0$ يكون: $|x| = x$

$$= \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

بشرط $x \neq 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$= 1+0-0 = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

b $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

1-4

نهايات بعض الدوال المثلثية

Limits of Some Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة.

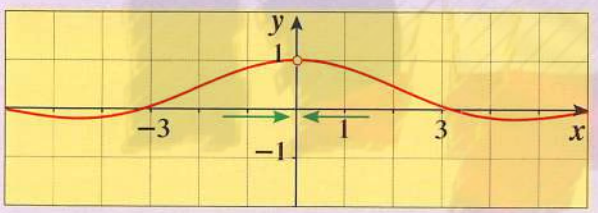
المفردات والمصطلحات:

- نهاية دالة مثلثية Limit of a Trigonometric Function
- نظرية الإحاطة Sandwich Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

عند حساب: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (x rad) وتمثيلها بيانيًّا كما في الشكل (1)، تقتربُ قيمتُها من الواحد عندما تقترب x من الصفر(x rad). وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x بشكل كاف من الصفر دون أن تساويه.

x	y
−0.3	0.98507
−0.2	0.99335
−0.1	0.99833
−0.01	0.9998
0	ERROR
0.01	0.9998
0.1	0.99833
0.2	0.99335
0.3	0.98507
$y = \frac{\sin x}{x}$	



شكل (1)

يبيّن الشكل (1) الرسم البيانيّ للدالّة f كما يعطي الجدول أعلاه قيمًا للدالّة موضّحًا أنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x من الصفر.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1)

إذا كان b , a عددين حقيقيين، $b \neq 0$, $a \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

فمثلًا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

معلومة:

في دراستنا للدوال المثلثية يكون قياس الزوايا بالراديان.

وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\tan x = 0$$

ويمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية. يمكننا استنتاج أن: $\lim_{x\to 0}\cos ax = 1 \quad , \quad a \in R$

مثال (1)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}$ b $\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$ c $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

الحل:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}$

نظرية (قاعدة الضرب)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$= 1\times 0$

$= 0$

b $\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$

نظرية

$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0}(x-3)}{\lim_{x\to 0}\cos x}$

$= \frac{-3}{1}$

$= -3$

c $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

اضرب البسط والمقام في $1+\cos x$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\cdot(1+\cos x)\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos^2 x}\cdot(1+\cos x)\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$

$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}(1)+\lim_{x\to 0}\cos x\right)$

$= (1)^2\times(1+1)$

$= 1\times 2 = 2$

حاول أن تحل

a هل يمكنك حل c في المثال (1) بطريقة أخرى؟

b أوجد النهاية:

1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}$ 2 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}$ 3 $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

مثال (2)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

b $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

الحل:

a $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$ $\qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\because \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \ , \ 1 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$ $\qquad$ قاعدة الضرب، توزيع النهاية

$= 1 \times \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \cos x \neq 0$

b $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{5\tan x}{4x} - \frac{3\sin x}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5\tan x}{4x} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin x}{4x}$

$= \frac{5}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{3}{4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ $\qquad$ نظرية (قاعدة الطرح)

$= \frac{5}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \ , \ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$= \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ بسّط

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\tan x}$

b $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x}$

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a , b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

b $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x\cos x}{3x}$

الحل:

a $\frac{5x+\sin x}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{\sin x}{x}$ قسمة البسط على المقام

$= 5 + \frac{\sin x}{x}$ بسّط: $x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 5 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ نظرية (قاعدة الجمع)

$= 5 + 1$

$= 6$

b $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cos x\right)$ قسمة البسط على المقام

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{3}\cos x$ بسّط $x \neq 0$

$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1$

$= -\frac{1}{3}$ بسّط

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$ **b** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

نظرية الإحاطة Sandwich Theorem

إذا لم يكن ممكنًا إيجاد قيمة النهاية بطريقة مباشرة، فبإمكاننا إيجادها بطريقة غير مباشرة باستخدام نظريّة الإحاطة.

تتعلّق هذه النظريّة بدالّة f قيمتها بين قيم دالّتين أخريين g , h

حيث إذا كان للدالّتين g , h النهاية نفسها عندما $x \to c$

فإن للدالّة f حينها النهاية نفسها عندما $x \to c$

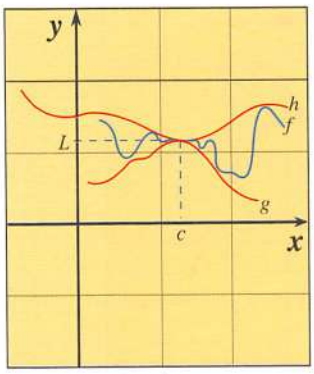
معلومة:

تسمى نظرية الإحاطة أحيانًا

Squeeze Theorem

Sandwich Theorem

or Pinching Theorem



نظرية (13): نظرية الإحاطة

Sandwich Theorem

ليكن L , c عددين حقيقيين

فإذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل x في جوار c ، $x \neq c$

وكان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$

فإنّ: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

مثال (4)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

b $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-x^2\sin\frac{1}{x}\right)$

الحل:

نعلم أنّ قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1,1]$

لذلك فإن:

a $-1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1$

اضرب في x^2

$-x^2\leqslant x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2$

$\because\ \lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

ومن نظريّة الإحاطة

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=0$

b $-1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1 \implies 1\geqslant -\sin\frac{1}{x}\geqslant -1$

قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1,1]$

$\therefore\ -1\leqslant -\sin\frac{1}{x}\leqslant 1$

اضرب في x^2

$-x^2\leqslant -x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2$

أضف 4

$4-x^2\leqslant 4-x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant 4+x^2$

$\because\ \lim\limits_{x\to 0}(4-x^2)=4\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}(4+x^2)=4$

نظرية الإحاطة

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\left(4-x^2\sin\frac{1}{x}\right)=4$

حاول أن تحل

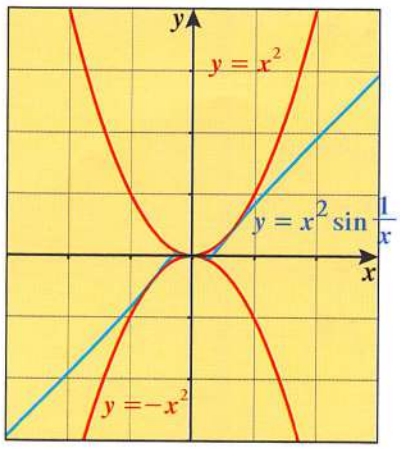
4 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)$

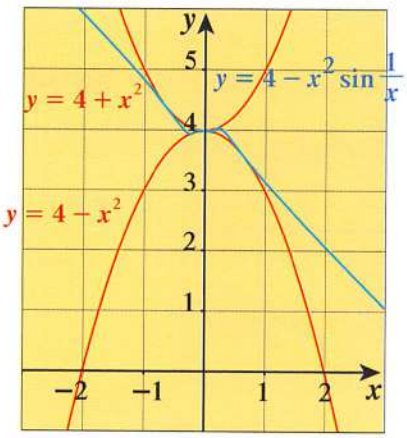
b $\lim\limits_{x\to 0}\left(2+x^2\sin\frac{1}{2x}\right)$

الأشكال التالية تحقق بيانيًّا المثال **4**.

a



b



كذلك يمكننا استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية عندما $x \to \pm\infty$.

مثال (5)

أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

الحل:

نعلم أن:

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\forall x > 0 \ , \ \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\because \ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

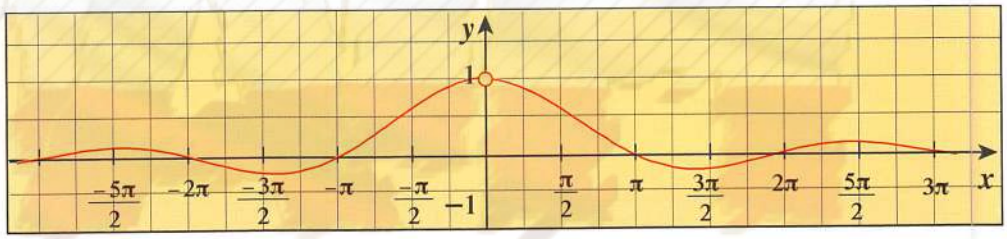
نظرية الإحاطة

$$\therefore \ \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x+1}$

ويمكننا التأكد من صحة حل المثال السابق بيانيًّا كالتالي:



x (rad)	$y = \frac{\sin x}{x}$
$\frac{7\pi}{2}$	-0.091
$\frac{37\pi}{7}$	0.0224
150	-0.00477
240	0.00394
300	-0.00333
600	0.000074

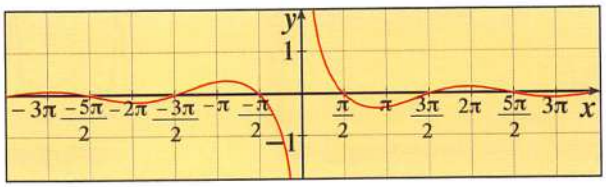
الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات، وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x \to \pm\infty$.

يبيّن جدول قيم الدالة f أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

ويمكن استنتاج $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

كذلك يمكن استنتاج

الرسم البياني للدالة f: $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x \to \pm\infty$ ويمكن استنتاج أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$



x (rad)	$y = \frac{\cos x}{x}$
3π	-0.106
4π	0.0795
100	-0.00862
200	0.002435
300	-0.0000736
450	0.00162256

الاتّصال

Continuity

سوف تتعلم

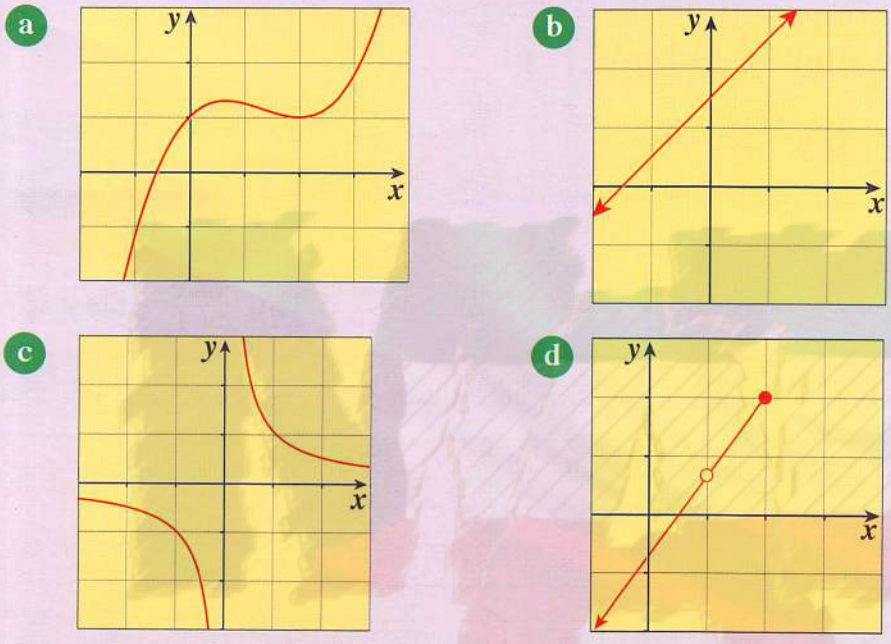
- الاتصال عند نقطة.
- الانفصال عند نقطة.
- أنواع الانفصال.
- التخلص من الانفصال.

المفردات والمصطلحات:

- الاتصال Continuity
- اتصال من الجهتين Two–Side Continuity
- اتصال من جهة اليمين Continuity From the Right
- اتصال من جهة اليسار Continuity From the Left
- الاتصال عند نقطة Continuity at a Point
- انفصال Discontinuity
- انفصال يمكن التخلص منه Removable Discontinuity
- انفصال نتيجة قفزة Jump Discontinuity
- انفصال لا نهائي Infinite Discontinuity

دعنا نفكر ونتناقش

البيانات التالية توضح منحنيات دوال مختلفة.



أي من المنحنيات أمكن رسمه دون رفع سن القلم؟ وأيها لزم رفع سن القلم؟

الاتصال عند نقطة Continuity at a Point

1 المنحنيات في البيانات b , a

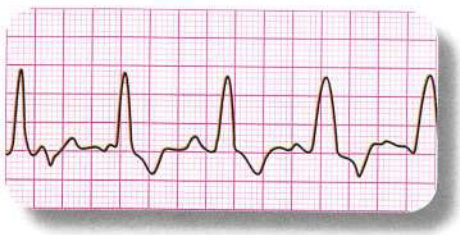
نقول عنها أن ليس بها **نقاط انفصال** «**متصلة عند كل نقطة من نقاطها**».

2 المنحنيات في البيانات d , c

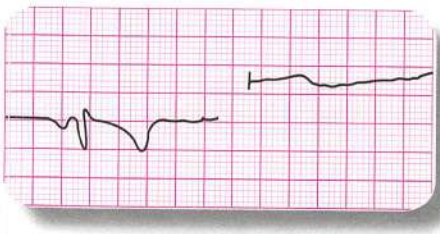
نقول إن هذه المنحنيات لها نقاط انفصال.

معلومة:

بيان تخطيط القلب يعبّر بوضوح عن الاتصال إذا كان القلب سليمًا ومعافى، وعن الانفصال إذا كان يوجد انسداد في الشرايين.



شكل (1)

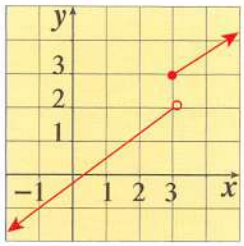


شكل (2)

يستخدم الأطباء مبدأ الاتصال لدراسة منحنى تخطيط القلب.
يبيّن الشكل (1) تخطيطًا متصلًا بينما يبيّن الشكل (2) تخطيطًا به نقاط انفصال.

تدريب

1

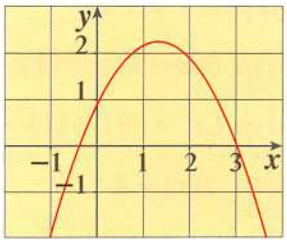


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

2

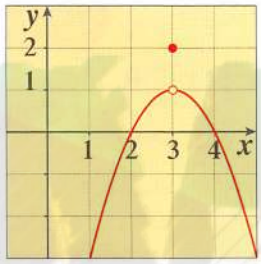


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

3

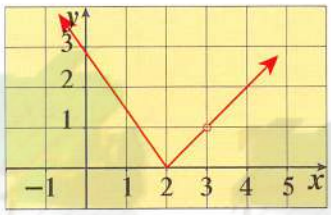


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

4



$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط **الثلاثة** التالية:

1. الدالة f **معرّفة** عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f **منفصلة (ليست متصلة) عند** $x = c$.

مثال (1)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$.

الحل:

$$f(1) = (1)^2 + 3(1) = 1 + 3 = 4 \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (5x - 1) = 5(1) - 1 = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 3x) = (1)^2 + 3(1) = 4$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$ ابحث اتصال f عند $x = 0$

مثال (2)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \le 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$.

الحل:

$$f(3) = 7$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 7 = 7$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)}{\cancel{x-3}_{1}}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

$$\because \lim_{x \to 3^-} f(x) \ne \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$\therefore$ $\lim_{x \to 3} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2 + 1 & : x > 2 \end{cases}$

في المثال السابق نجد أن $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 7$ في هذه الحالة تكون الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار وسوف نتطرق لذلك لاحقًا.

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

الحل:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & : x > 2 \\ -x+2 & : x < 2 \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & : x > 2 \\ \dfrac{-x+2}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 1 & : x > 2 \\ -1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$$

$$\because\ \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 2$

حاول أن تحل

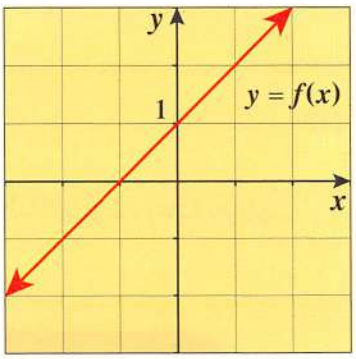
3 **ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

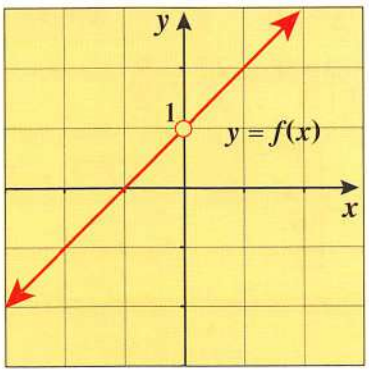
ملاحظة: **في المثال السابق الدالة f متصلة عند $x = 2$ من جهة اليمين. لماذا؟**

يبيّن الشكلان c , b أدناه أمثلة توضيحيّة **لبعض الأنواع المختلفة للانفصال:**

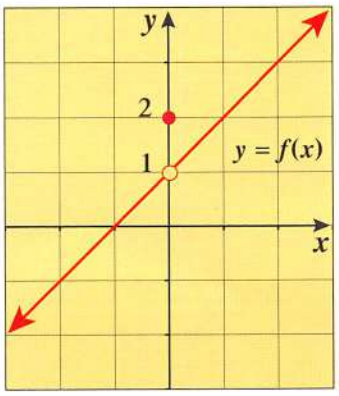
a



b



c

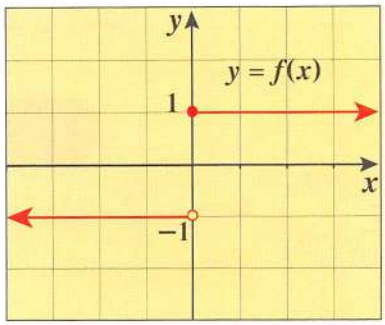


فالدالّة الموضّحة في الشكل a متّصلة عند $x = 0$، والدالّة الموضّحة في الشكل b ليست متّصلة عند $x = 0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0) = 1$. الدالّة الموضّحة في الشكل c ليست متّصلة عند $x = 0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0)$ مساوية لِـ 1 بدلًا من 2.

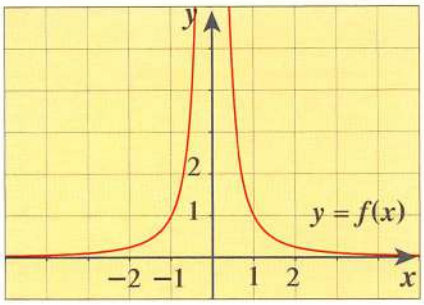
الانفصال في c , b هو انفصال يمكن **التخلّص منه** من خلال إعادة تعريف الدّالة عند $x = 0$ وذلك بوضع $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

والأشكال التالية أمثلة أخرى لدوال منفصلة:

d



e

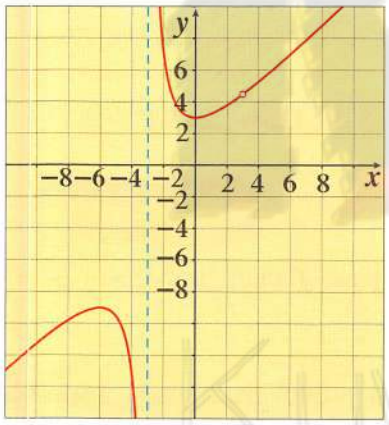


وإذا نظرنا إلى الانفصال في e , d حيث $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة ولا توجد طريقة لإصلاح ذلك الوضع بتغيّر f عند الصفر. للدالّة في d لها **انفصال نتيجة قفزة**: والنهايات ذات الجانب الواحد موجودة لكن لها قيم مختلفة.

(نهاية الدالة من جهة اليمين ≠ نهاية الدالة من جهة اليسار).

والدالّة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في e لها **انفصال لا نهائيّ**. (النهاية غير موجودة).

التخلّص من الانفصال The Removal of Discontinuity



لتكن الدالّة f : $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

لاحظ أن مجال f هو $D = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}_{1}(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+3x+9}{x+3} \quad , \quad x \neq 3$$

ومن الرسم البيانيّ للدالّة f نلاحظ أن لبيان f انفصال عند $x = 3$ يمكن التخلّص منه لأن النهاية موجودة بينما الانفصال عند $x = -3$ لا يمكن التخلّص منه لأن النهاية غير موجودة.

وللتخلّص من الانفصال نعرّف f عند $x = 3$ بحيث نجعل $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

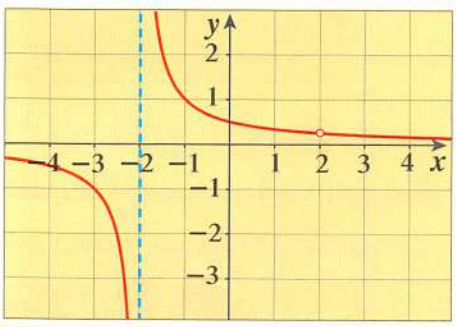
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3}$$

$$= \frac{9+9+9}{3+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x^2-9} & : \ x \neq 3 \ , \ x \neq -3 \\ \frac{9}{2} & : \ x = 3 \end{cases}$$

مثال (4)



لتكن الدالّة : $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ الموضّح بيانها بالشكل

a بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x = -2$, $x = 2$

b أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x = 2$

الحل:

a $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

$= \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{x+2} \quad , \quad x \neq 2$

حلّل المقام إلى عوامل

مجال f : $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = -2$, $x = 2$ لأنها غير معرّفة عندهما.

b $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ يمكن إعادة تعريف f عند $x = 2$ لأن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$

نعيد تعريف الدالة f ونسمي الدالة بـ g.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & : \ x \neq 2 \ , \ x \neq -2 \\ \dfrac{1}{4} & : \ x = 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل

4 أعد تعريف الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ لتصبح دالّة متّصلة عند $x = 1$.

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

سوف تتعلم

- نظريات الاتصال.
- دوال متصلة.
- الدوال المركبة.
- اتصال الدوال المركبة.

المفردات والمصطلحات:

- دالة متصلة
Continuous Function
- دالة مركبة
Composite Function

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

والدالة g : $g(x) = |x - 2|$

والدالة q : $q(x) = x^2 - 5$

1. ابحث اتصال كل من f, g عند $x = 2$
2. ابحث اتصال كل من $f \cdot q$, $f + q$ عند $x = 2$
3. لتكن h : $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
   - a. اكتب h دون استخدام رمز القيمة المطلقة.
   - b. هل الدالة h متصلة عند $x = 2$؟ ولماذا؟

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

الجمع:	$f+g$	1
الطرح:	$f-g$	2
الضرب في ثابت:	$k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$	3
الضرب:	$f \cdot g$	4
القسمة:	$\dfrac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$	5

دوال متّصلة Continuous Functions

1. الدالة f : $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\dfrac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

معلومة:

تمثّل الأفعوانيّة خطًّا متّصلًا لمسار العربة.

مثال (1)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 + |x| \quad , \quad c = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x \quad , \quad c = \frac{\pi}{2}$

الحل:

a لتكن الدالة g : $g(x) = x^2$

الدالة h : $h(x) = |x|$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

الدالة h دالة مطلق x متصلة عند $x = -1$

$\therefore$ دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

b لتكن الدالة g : $g(x) = \sin x$

الدالة h : $h(x) = \cos x$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة h دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$ (نظرية)

حاول أن تحل

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x| \quad , \quad c = 3$

b $f(x) = \frac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c = \frac{\pi}{4}$

مثال (2)

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

الحل:

لتكن الدالة g : $g(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$

الدالة h : $h(x) = \frac{1}{x}$

الدالة g دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$).

الدالة h دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$).

$\therefore$ دالة الطرح f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = 3$ (نظرية)

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$

فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال (3)

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$, $x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x = -1$

الحل:

a لتكن الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة h : $h(x) = x^2 + 1$

g دالة جذرية حيث $n = 3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x = 1$ (نظرية)

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 1$

وحيث إن $h(1) = 2$, $2 \neq 0$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x = 1$

b نفرض أن g : $g(x) = x + 3$ حيث $x \geqslant -3$

g دالة متصلة عند $x = -1$

وحيث إن $g(-1) = 2$, $2 > 0$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+3}$ متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الدالة المركبة Composite Function

إذا كانت كل من g , f دالة حقيقية فإننا سنرى من خلال بعض الأمثلة أننا نستطيع تعيين دالة جديدة تنتج من تركيب الدالتين f , g إذا توفرت بعض الشروط.

لنأخذ على سبيل المثال الدالتين الحقيقيتين:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$$

حيث: $f(x) = x - 1$

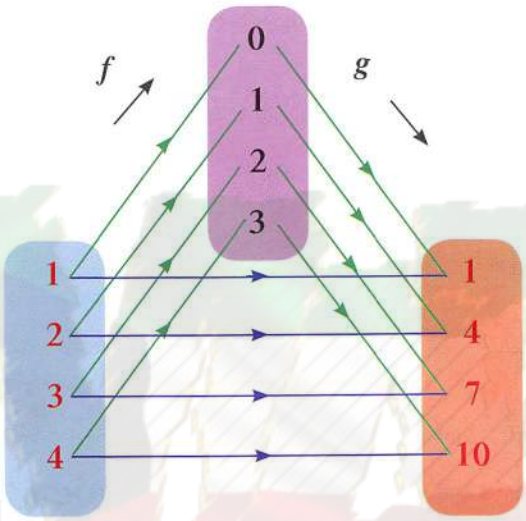
$$g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$$

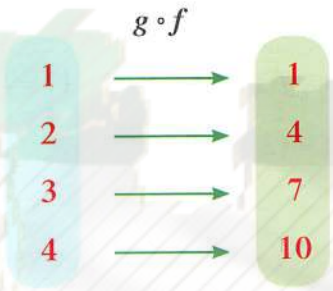
$$g(x) = 3x + 1$$

واضح أن:

تحت تأثير الدالة الأولى f	تحت تأثير الدالة الثانية g
$1 \longrightarrow 1-1=0$	$0 \longrightarrow 3\times 0+1=1$
$2 \longrightarrow 2-1=1$	$1 \longrightarrow 3\times 1+1=4$
$3 \longrightarrow 3-1=2$	$2 \longrightarrow 3\times 2+1=7$
$4 \longrightarrow 4-1=3$	$3 \longrightarrow 3\times 3+1=10$

وإذا فرضنا دالة ثالثة تعمل عمل الدالتين f , g معًا (f ثم g) لوجدنا أنه تحت تأثير هذه الدالة الجديدة:





نرمز للدالة الجديدة بالرمز $(g\circ f)$ وتقرأ g بعد f

ويكون:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)=1$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=4$

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(2)=7$

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(3)=10$

لاحظ أن: مدى الدالة الأولى f هو مجال الدالة الثانية g وإلا لما أمكن تعيين $(g\circ f)$.

وعمومًا:

إذا كانت كل من f , g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب.

مثال (4)

الدالتان g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(2)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(2)$

الحل:

a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (1 + x)^2 - 1 = x^2 + 2x$

حل آخر

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + x) = (1 + x)^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x$

b $(g \circ f)(2) = (2)^2 + 2(2) = 8$

c $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

حل آخر

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

d $(f \circ g)(2) = (2)^2 = 4$

حاول أن تحل

4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(-1)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(-1)$

نستنتج من مثال (4) أن:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

إلّا في بعض الحالات الخاصة.

مثال (5)

لتكن: $g(x) = x^4 + 2$, $f(x) = \sqrt{x}$

أوجد:

a $(f \circ g)(x)$ b $(f \circ g)(0)$ c $(g \circ f)(x)$ d $(g \circ f)(0)$

الحل:

لاحظ أن مجال f هو $[0, \infty)$

وأن مدى g : $[2, \infty)$ هو مجموعة جزئية من مجال f

مجال g هو $\mathbb{R}$

$\therefore$ مدى f هو مجموعة جزئية منه

a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^4 + 2}$

b $(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$

c $(g \circ f)(x) = (f(x))^4 + 2 = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$

d $(g \circ f)(0) = (0)^2 + 2 = 2$

حاول أن تحل

5 لتكن: $g(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد:

a $(f \circ g)(x)$

b $(g \circ f)(\sqrt{3})$

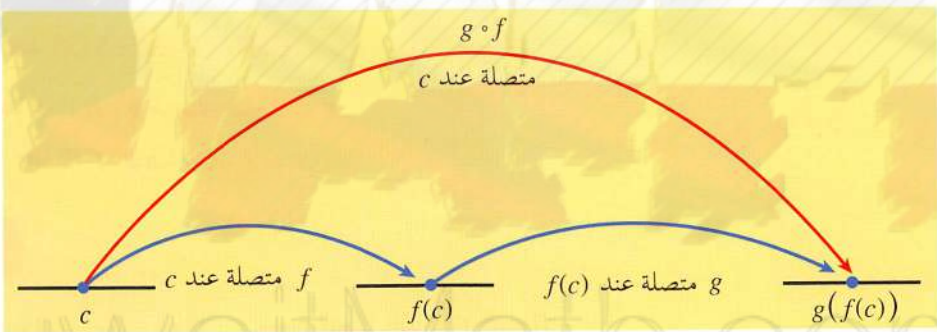
اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة Continuity of Composite Functions at a Point

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

أي أن نهاية $g(f(x))$ عندما $x \to c$ هي $g(f(c))$ بمعنى

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(f(c))$$



مثال (6)

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

الحل:

f دالة متصلة عند $x = -2$ (1)

$f(-2) = 9$

g دالة متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}^+$

$\therefore$ g دالة متصلة عند $x = 9$

أي أن g دالة متصلة عند $x = f(-2)$ (2)

من (2) , (1) نجد أن $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

حاول أن تحل

6 لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

مثال (7)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

الحل:

نفرض أن: $g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 5x + 6$

فنجد أن: $f(x) = (g \circ h)(x)$

$g(h(x)) = |x^2 - 5x + 6|$

h دالة متصلة عند $x = 2$ (1)

$h(2) = 4 - 10 + 6 = 0$

g دالة متصلة عند $x = 0$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(2)$ (2)

من (1) , (2) نجد أن $g \circ h$ متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 2$

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

سوف تتعلم

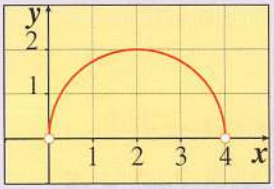
- الاتصال على فترة.
- ناتج تركيب دالتين متصلتين.

المفردات والمصطلحات:

- الاتصال على فترة Continuity on an Interval

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ معرّفة على الفترة $(0, 4)$



a ابحث اتصال f عند $x = 2$, $x = 1$

b هل f متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين؟

c هل f متصلة عند $x = 4$ من جهة اليسار؟

d هل توجد نقاط تنتمي إلى الفترة $(0, 4)$ لا تكون فيها الدالة f متصلة؟

الاتّصال على فترة Continuity on an Interval

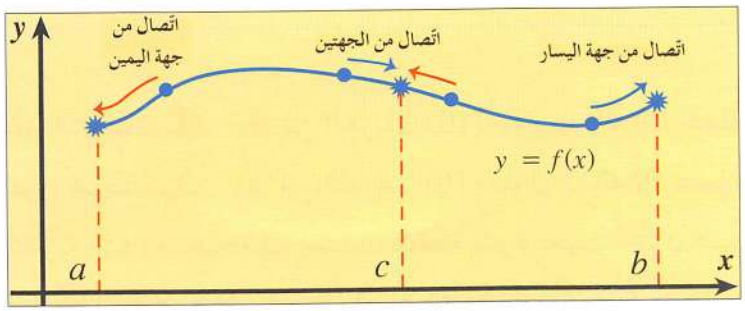
تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$



الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

مثال (1)

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

الحل:

$$f(x)=x^2-3 \quad : \quad x\in(1,3)$$

$$\forall c\in(1,3)$$

$$f(c)=c^2-3$$

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}(x^2-3)=c^2-3$$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c) \qquad \forall c\in(1,3)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,3)$ (1)

ندرس اتصال الدالة f عند $x=1$ من جهة اليمين.

$$f(1)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)=-2$$

$$\because f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين. (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x=3$ من جهة اليسار.

$$f(3)=6$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)=6$$

$$\therefore f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار. (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1,3]$

حاول أن تحل

1 ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : x=1\\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5\\ \dfrac{26}{5} & : x=5\end{cases}$$

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $[a,b]$**.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $(a,b]$**.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a,c]$, $[c,b]$ فإن الدالة متصلة على $[a,b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$.

مثال (2)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

a $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $[-1,5]$

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $[0,5]$

الحل:

a $\because$ f دالة حدودية نسبية ،

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2+1 \neq 0$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because$ $[-1,5] \subseteq \mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة على $[-1,5]$

b

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

$x^2-4=0 \qquad \forall x \in \{-2,2\}$

$\because$ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\because$ f ليست متصلة عند $x=2$ ، $2 \in [0,5]$

$\therefore$ الدالة f متصلة $\forall x \in [0,5]-\{2\}$

أي أنها متصلة على كل من $[0,2)$, $(2,5]$.

حاول أن تحل

2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $[0,2]$

مثال (3)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x \leq -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x > -1 \end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو: $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها.

نفرض: $g(x) = x + 3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because \; f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

$\therefore$ f دالة متصلة على $(-\infty\ , -1]$ (1)

نفرض: $h(x) = \dfrac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\because \; f(x) = h(x) \quad \forall\, x \in (-1\ ,\ \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $(-1\ ,\ \infty)$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين.

حيث نهاية المقام $\neq 0$ $\quad f(-1) = 2$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{4}{x+3} = 2$$

$$\because \; f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -1$ من جهة اليمين. (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

حاول أن تحل

3 لتكن f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 1 \\ -x + 2 & , \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

مثال (4)

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : \quad x < 0 \\ 2 & : \quad x = 0 \\ ax + b & : \quad x > 0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين $a\ ,\ b$

الحل:

$\because$ f دالة متصلة على مجالها $\mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة عند $x = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - a) = -a$$

$$\therefore\ -a = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax + b) = b$$

$$\therefore\ b = 2$$

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : \quad x = 1 \\ ax + b & : \quad 1 < x < 4 \\ b + 8 & : \quad x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1, 4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

تعلمنا دراسة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ عند $x = c$ وكذلك يمكننا دراسة اتصال الدالة f على فترة ما باستخدام التعميم التالي:

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = x^2 - 2x$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

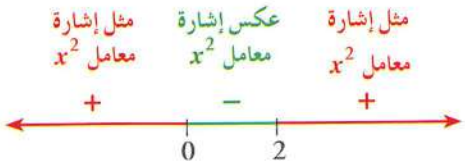
$$\therefore\ D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$$x^2 - 2x \geq 0$$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 2x = 0$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \ , \ x = 2$$



$\therefore$ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - (0, 2)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-5, 0]$ حيث $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

$$g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} - (0, 2)$$

$\because [-5, 0]$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R} - (0, 2)$

$$\therefore\ g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-5, 0] \qquad (1)$$

معلومة:

إشارة الحدودية $f(x)$ تكون ثابتة لا تتغير في الفترة (a , b) إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية $f(x)$. ولتعيين إشارة الحدودية في هذه الفترة نعوّض عن x بأي قيمة $c \in (a , b)$.

$\because$ الدالة g : $g(x) = x^2 - 2x$ دالة متصلة على $[-5, 0]$ (2)

من (2) , (1)

$\therefore$ f متصلة على $[-5, 0]$

حاول أن تحل

5 لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

مثال (6)

لتكن f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = 9 - x^2$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

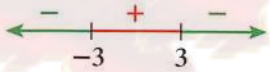
$D_f = \{x : g(x) \geqslant 0\}$

$9 - x^2 \geqslant 0$

المعادلة المناظرة: $9 - x^2 = 0$

$(3 - x)(3 + x) = 0$

$x = 3 \ , \ x = -3$



$\therefore$ مجال الدالة f هو $[-3, 3]$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-3, 3]$ حيث $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-3, 3]$ (1)

الدالة g : $g(x) = 9 - x^2$ متصلة على $[-3, 3]$ (2)

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة على $[-3, 3]$

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

نفرض أن: $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = x^2 - 5x + 4$

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(x^2 - 5x + 4) \\ &= \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} \end{aligned}$$

$\because$ الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because$ الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

لتكن الدالّة: $f(x) = \dfrac{x^3 + kx^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أوجد قيمة k التي تجعل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتصبح متّصلة عند $x = 2$، ثم أعد تعريف الدالّة.

الحل:

a **المقام لا يساوي صفر**

$x^2 - x - 2 \neq 0$

تحليل المقام

$(x+1)(x-2) \neq 0$

$x \neq -1 \ , \ x \neq 2$

$\therefore$ مجال الدالّة: $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

b كي نعرف الدالّة وتصبح متّصلة عند $x = 2$، يجب أن يكون 2 صفرًا للبسط أي:

$x^3 + kx^2 + 3x - 2 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

a, b, c أعداد حقيقية

نتوسّع

$x^3 + kx^2 + 3x - 2 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

بمقارنة المعاملات نجد أن: $a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = 1$

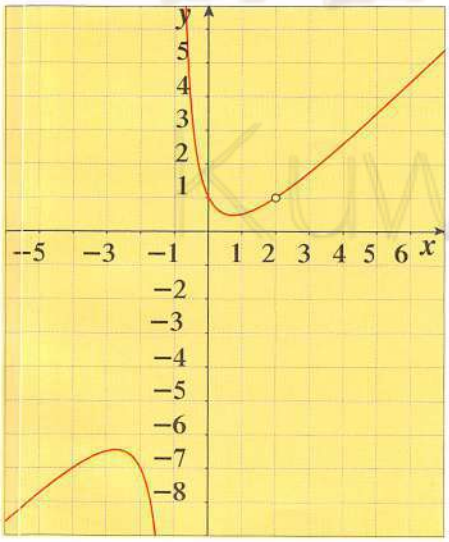
فنستنتج أن: $k = b - 2a = -1 - 2(1) = -3$

تصبح معادلة الدالة: $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-2)}^{1}(x^2 - x + 1)}{\cancel{(x-2)}_{1}(x+1)}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

عندها يمكن إعادة تعريف الدالة وتسميتها بـ g

$$\therefore \ g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2} & , \ x \neq 2 \ , \ x \neq -1 \\ 1 & , \ x = 2 \end{cases}$$



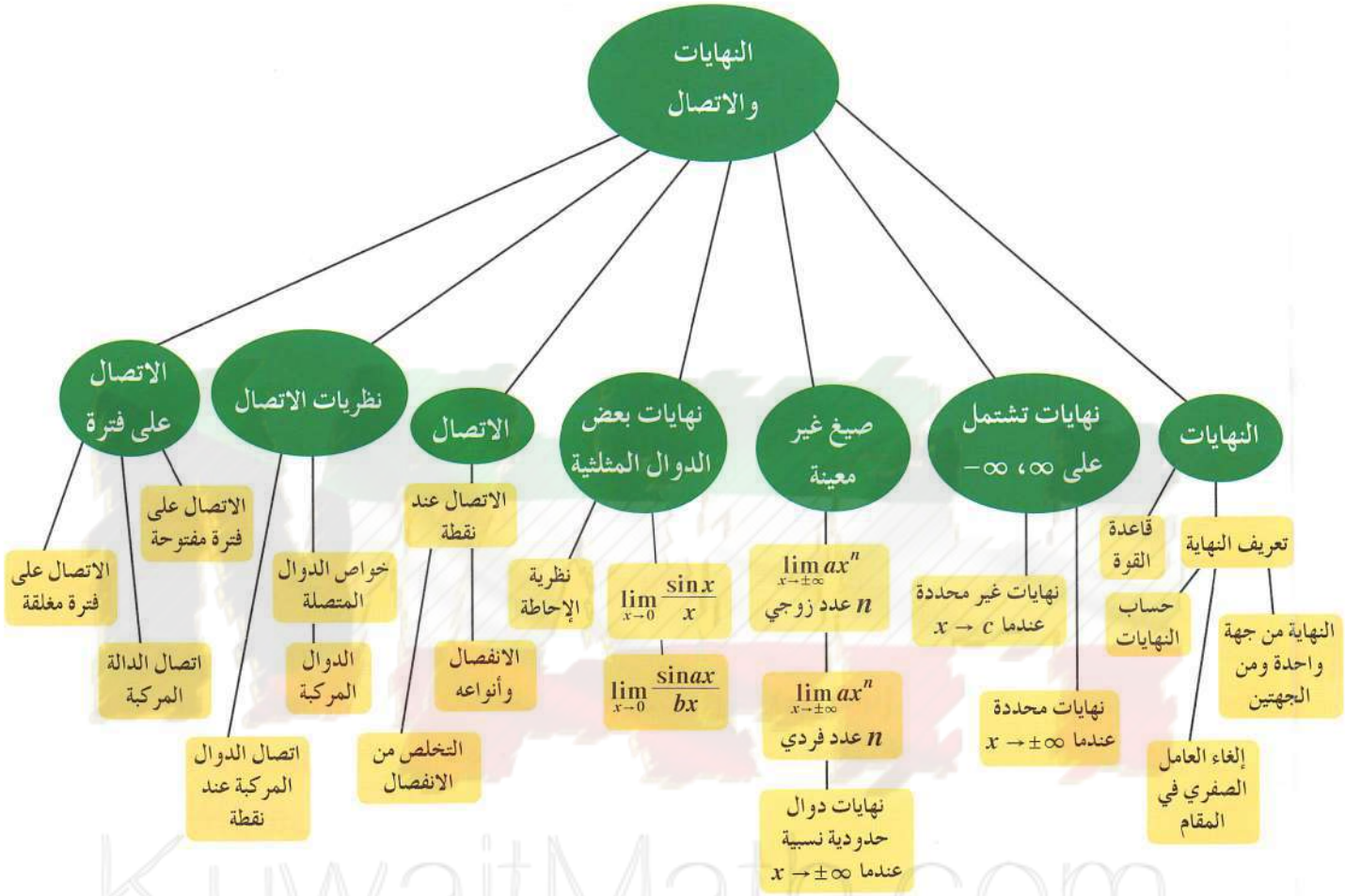
مسألة إضافية

لتكن الدالّة $f(x) = \dfrac{x^4 + kx^3 - 15x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x - 10}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أعد تعريف الدالة f بحيث تكون منفصلة عند $x = -2$ فقط.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

- لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا، نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.
- ليكن c , L عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.
- بفرض أن c , L عددين حقيقيين يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$
- إذا كانت f : $f(x) = k$ وكان c , k أعدادًا حقيقيّة، k ثابت فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} k = k$
- إذا كانت $f(x) = x$ حيث c عددًا حقيقيًّا، فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} x = c$
- إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ فإن:
  - **a** قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$
  - **b** قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

c قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$

- إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_0$$

- إذا كانت $g(x)$ ، $f(x)$ كثيرتي حدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(c)}{g(c)}\ ,\ g(c)\neq 0$
- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا وكانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة فإن:

a $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

b $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c>0$)

c $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$)

- لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a,∞) فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.
- لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty,a)$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.
- لتكن: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$
- لتكن: $f(x) = \dfrac{k}{x^n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\ ,\ k\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{k}{x^n} = 0$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm b] = \pm\infty$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim\limits_{x\to a}[b\cdot f(x)] = \pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب $\lim\limits_{x\to a}[b\cdot f(x)] = \mp\infty$

- إذا كان n عدد صحيح موجب وزوجي فإن: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{(x-c)^n} = \infty$
- إذا كان n عدد صحيح موجب وفردي فإن:

1 $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{1}{(x-c)^n} = \infty$

2 $\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

- إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$
- إذا كانت $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ إذا وفقط إذا ($\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$)
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ إذا وفقط إذا ($\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$)
- الخط $y=b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

- الخط $x=a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توافر على الأقل أحد الشروط التالية:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

- لتكن: $f(x) = ax^n \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \in \mathbb{R}^*$:

1 إذا كان n عدد زوجي فإن: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \ a > 0 \\ -\infty & : \ a < 0 \end{cases}$

2 إذا كان n عدد فردي فإن: $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \ a > 0 \\ \infty & : \ a < 0 \end{cases}$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \ a > 0 \\ -\infty & : \ a < 0 \end{cases}$

- إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \ , \ g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$

فإن : b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$ a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m} : n = m$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ حيث x بالراديان. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

- إذا كان b , a عددين حقيقيين، $a \neq 0 \ , \ b \neq 0$ فإن: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b} \ , \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx}{\sin ax} = \dfrac{b}{a} \ , \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

- ليكن L , c عددين حقيقيين، إذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ لكل $x \neq c$ في جوار c، وكان $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ فإنّ: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

- تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة c في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

- لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة معرّفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.

2 $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة

3 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f ليست متصلة (منفصلة) عند c.

- إذا كانت g , f دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

1 $f + g$ 2 $f - g$

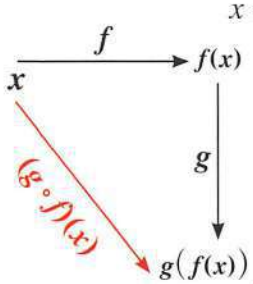
3 $k \cdot f$ حيث k أيّ عدد حقيقي ثابت. 4 $f \cdot g$

5 $\dfrac{f}{g} \ , \ g(c) \neq 0$

- الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}^+ : x = c$ حيث n عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل $c \in \mathbb{R} : x = c$ حيث n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

- إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$ فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

- إذا كانت كل من g, f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعيّن دالة مركبة $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) : h$



- إذا كانت f متّصلة عند c و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

- إذا كانت الدالّة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّ:

1 الدّالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)، إذا كانت f متّصلة عند كل x في الفترة (a, b)

2 الدّالة f متّصلة عند a من جهة اليمين إذا كان: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

3 الدّالة f متّصلة عند b من جهة اليسار إذا كان: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

وإذا تحقّقت الشروط الثلاثة، فإنّ الدالّة تكون متّصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

- إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.