دولة الكويت
وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الأحمدي التعليمية

ثانوية عبد الله الأحمد الصباح

قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

2018/2017

أوراق عمل للصف الحادي عشر علمي

إعداد :

أ. أحمد طارق مال الله

رئيسا القسم :

أ. عبد الباقي اسماعيل

أ. أحمد طارق مال الله

بإشراف الموجه الفني :

أ. عادل الحبشي

مدير المدرسة :

أ. يوسف بوسكندر

KuwaitMath.com

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

أي أن إذا كان $A^2 = x$ فإن $A = \pm\sqrt{x}\ ,\ x > 0$

- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبية
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

الجذور التكعيبية Cubic Roots

إذا كان $A^3 = B$، فإن $A = \sqrt[3]{B}$ وتقرأ **الجذر التكعيبي** للعدد B حيث 3 هو **دليل الجذر**، B هو **المجذور**.

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

تمرين 1 باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

$\sqrt{75 \times 300}$

$\sqrt{\frac{-1}{121}}$

$\sqrt{\frac{2}{50}}$

$\sqrt{0.01}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

$\sqrt[3]{-8}$

$\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$

$\sqrt[3]{60 \times 90}$

تمرين 3

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلية الحاسبة:

a -27 b 64 c -0.008 d $\frac{343}{216}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تبسيط الجذور Simplifying Radicals

حتى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر.
  فمثلًا $\sqrt{8a^6b^7}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ «ليس في أبسط صورة ».
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن.
  مثل: $\sqrt[10]{32}$ «ليس في أبسط صورة».

تمرين 1

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

$\sqrt{16x^2}$

$\sqrt{4x^6}$

$\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

$\sqrt{0.25x^6}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$5\sqrt{216x^2+23\sqrt{64x^4}},x>0$

$\sqrt[3]{-250x^6y^5}$

تمرين 2

أوجد الناتج في أبسط صورة

$3\sqrt{32}-\sqrt{98}$

$2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{375}$

KuwaitMath.com

$3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 3

أوجد الناتج في أبسط صورة:

$2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

$4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$

$\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

$\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$	$\sqrt[3]{x^3} = x$
$(\sqrt{x})^2 = x$	$(\sqrt[3]{x})^3 = x$
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$
$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$

تمرين 1 أوجد الناتج في أبسط صورة

$\sqrt{2} \times (\sqrt{50} + 7)$

$\sqrt[3]{81x^2}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\sqrt[3]{-18} \times \sqrt[3]{-12}$

$\frac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}, \ x \neq 0$

تمرين 2

أوجد ناتج كل من التعبيرات الجذرية التالية:

$\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$

$\frac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}, \ x > 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعددًا غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عددًا نسبيًّا فإن x, y مترافقان.

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًّا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًّا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنّ: $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{5^3}=5$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًّا.

معلومة:
إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فإن:
$\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$.
$(\sqrt{a}-\sqrt{b}),(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ مترافقان.

يمكن إعادة كتابة كسر يحتوي مقامه على جذور تربيعية أو جذور تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام.

تمرين 1 **اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:**

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>1$, $x\in\mathbb{Q}$

$\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $x , y \in \mathbb{Z}^+$

تمرين 2

أوجد قيمة التعبير: $6-x^2$، إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

يمكنك كتابة أي تعبير جذري باستخدام الأس النسبي.

في الصورة الجذرية يعبر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبين في الجدول التالي:

الصورة الجذرية	الصورة الأسية
$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$	$25^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{27}$	$27^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{64}$	$64^{\frac{1}{4}}$

ويمكن استخدام خواص الأسس لتبسيط التعبيرات الجذرية.

إذا كان a عددًا حقيقيًّا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$:

وكان $\sqrt[n]{a}$ عددًا حقيقيًّا يساوي b حيث يرمز له بالرمز $b = \sqrt[n]{a}$ فإن $a = b^n$

دليل الجذر ← $\sqrt[n]{x}$ ← المجذور

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًّا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًّا} \end{cases}$

تمرين 1 **اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.**

تمرين 2 اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية:

$x^{1.5}, x \geq 0$ | $x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0$ | $x^{\frac{1}{6}}, x \geq 0$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 3 اكتب بالصورة الأسية كلًّا من:

$\sqrt[3]{x^2}$

$(\sqrt{y})^3 \ , \ \forall\, y \geq 0$

$\sqrt[3]{(5xy)^6}$

تمرين 4 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن:

$-\sqrt[4]{81}$

$\sqrt[4]{-81}$

$\sqrt[5]{32y^{10}}$

$\sqrt[5]{-x^{20}}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قوانين الأسس النسبية Laws of Rational Exponents

ليكن m , n عددين نسبيين، a , b عددين حقيقيين حيث b^m , b^n , a^n أعدادًا حقيقية.

القانون	المثال
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$
$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$	$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 5^2 = 25$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, $b \neq 0$	$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$, $b \neq 0$	$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$

يمكنك تبسيط أي عدد أسه عدد نسبي باستخدام قوانين الأسس النسبية أو بتحويله إلى تعبير جذري.

تمرين 1

بسِّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

$4^{1.5}$

$5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{1}{3}}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\sqrt[5]{0.01024}$

$\dfrac{\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$

$\left(\dfrac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}, t>0$

$x^{\frac{3}{5}}\div x^{\frac{1}{10}}, x>0$

$\dfrac{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x>0, y>0$

$\left(\dfrac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, x\geq 0, y>0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$ ، $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$ ، $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad , \quad y \neq 0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \in \mathbb{R}$

تمرين 1

بسّط كلًّا مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة):

$\sqrt[4]{36 \times 108}$

$(-32)^{-\frac{4}{5}}$

$\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

$\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$

$(2-\sqrt[3]{8})(2+\sqrt[3]{8})$

$\sqrt[4]{\frac{16x^{25}}{y^{12}}} : x, y > 0$

$\frac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$

$(\sqrt[4]{x} \bullet \sqrt[4]{y^3})^{-12}, x, y \in \mathbb{Q}^+$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} \bullet y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \bullet y^{-\frac{1}{2}}}, x > 0, y > 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}} = b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِـ $\frac{m}{n}$

إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان m عددًا فرديًّا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

تمرين 1

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

$\sqrt{x+3} = 5$

$\sqrt{x-2} + 9 = 0$

$(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 = 25$

$(5-3x)^{\frac{3}{2}} + 4 = 3$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

$2(2x+4)^{\frac{3}{4}} = 16$

$(x+5)^{\frac{2}{3}} = 4$

$(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

$(x+3)^{\frac{1}{2}} - 1 = x$

$\sqrt{3x+13} - 5 = x$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x - 25} = 0$

$(x-9)^{\frac{1}{2}} + 1 = x^{\frac{1}{2}}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$(2x+1)^{\frac{1}{3}} = (3x+2)^{\frac{1}{3}}$

$(2x-1)^{\frac{1}{3}} = (x+1)^{\frac{1}{6}}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

ثانيًا: المعادلات الأسية Exponential Equations

المعادلات: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$, $(-3)^x = -243$, $2^x = 32$

تسمى معادلات أسية.

لحل معادلة أسية يمكن استخدم الخاصية التالية:

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1, 0, 1\}$

m، n عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

تمرين 1

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.25$

$4^x = 2^x$

$5^x = 125\sqrt{5}$

$3^{x+1} = 1$

$5^{2x-3} = 125$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$

$3^{x^2+5} = 3^9$

$5^{x^2-3x} = 1$

$\mathbf{5^{x^2-4} = 1}$

$\mathbf{3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}}$

$\mathbf{2^{x^2-4} = 32}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.
3. مجال الدالة $f(x)=|x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4. مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x)\geq 0$.
5. مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.
6. مجال الدالة $f(x)=g(x)\pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين g, h.
   أي أن مجال f = مجال $g \cap$ مجال h.
7. مجال الدالة $f(x)=g(x).h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين g, h.
   أي أن مجال f = مجال $g \cap$ مجال h.
8. مجال الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين g, h عدا أصفار المقام $(h(x)\neq 0)$.
   أي أن مجال f = (مجال $g \cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

تمرين 1

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

$w(x)=\sqrt[3]{x^2-2}\,(\sqrt{2x-3})$

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x^2-1$

$u(x)=\sqrt[3]{7-5x}$

$g(x)=\sqrt{3x-7}+2$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

$f_1(x)=\dfrac{2x+5}{x-4}$

$f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$

$f_3(x)=\dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

$f_4(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-5x}{x}}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

$v(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$

$h(x)=-\dfrac{3x-1}{5-2x}$

$t(x)=\dfrac{\sqrt{-2x}+3}{x-1}$

$u(x)=\dfrac{\sqrt{3+4x}-3}{25-9x^2}$

$h(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$

$v(x)=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

a: حد مطلق (ثابت) — b: حد من الدرجة الأولى — c: حد من الدرجة الثانية

تمثل الدالة التربيعية بيانيًّا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطعًا مكافئًا** «parabola».

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل**.

تمرين 1

أي من الدوال التالية خطية؟ وأيها تربيعية؟

$y = x + 4$

$f(x) = x^2 - 7$

$y = (2x+1)(x-2) + 4 - 2x^2$

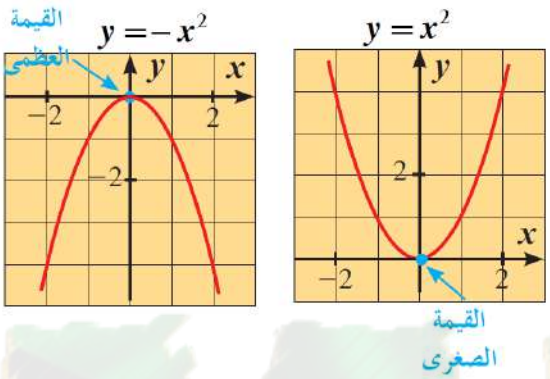
$y = (3x+7)^2 - (9x^2 - 49)$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية

Parabolas Representing Quadratic Functions



رأس القطع المكافئ هو أعلى (أو أدنى) نقطة في القطع المكافئ الذي يمثّل الدالة التربيعية بيانيًّا، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى **قيمة عظمى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى **قيمة صغرى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى.

محور التماثل (التناظر) يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور)، لذلك فإن كل نقطة من نقاط القطع المكافئ تناظرها نقطة أخرى هي صورتها بالانعكاس في محور التماثل، وتقع كلتا النقطتين المتناظرتين على البعد نفسه من محور التماثل الذي معادلته $x = x_1$ حيث x_1 الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع.

ملاحظة: **معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه (0, 0) هي: $y = ax^2$**

لإيجاد قيمة a، استخدم إحداثيات نقطة على المنحنى غير نقطة الرأس.

معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي $x = 0$

كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه. ويتغير **اتساع القطع المكافئ** تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.

تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

$D(1, -5)$

$F(3, 2)$

$G(-2, 5)$

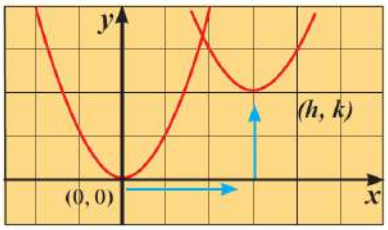
$H(-6, -2)$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.

المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0,\ h, k \in \mathbb{R}$



تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)** وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة: $y = ax^2$

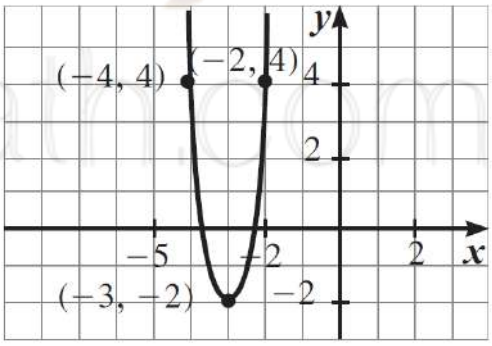
وتذكر أنه عندما تكون h، k موجبتين فإن الإزاحة تحرك المنحنى عدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى كما في الشكل. وعندما تكون h سالبة يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى اليسار، وعندما تكون k سالبة، يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى الأسفل.

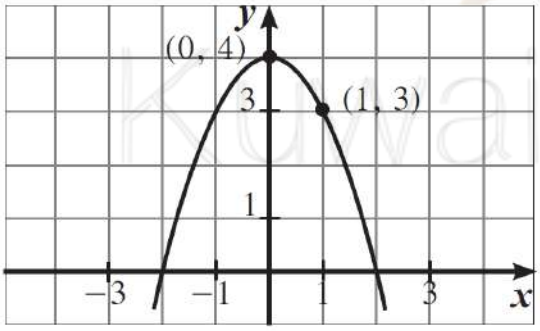
بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

تمرين 1 اكتب معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.





KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

ارسم كل قطع مكافئ مستخدمًا المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.

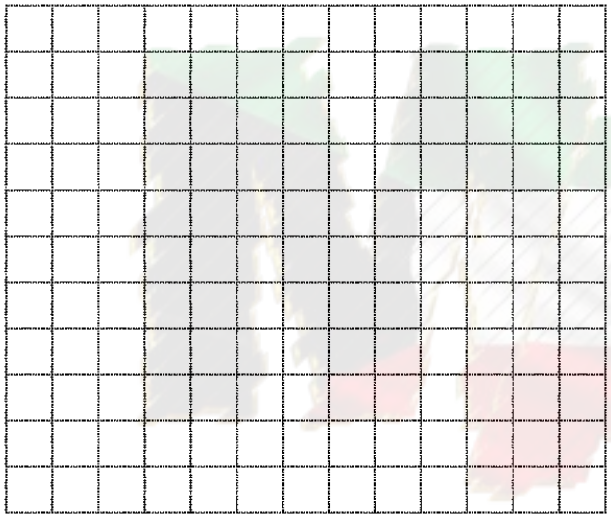
الرأس $V(0, 0)$ ويمر بالنقطة $P(2, 10)$

KuwaitMath.com

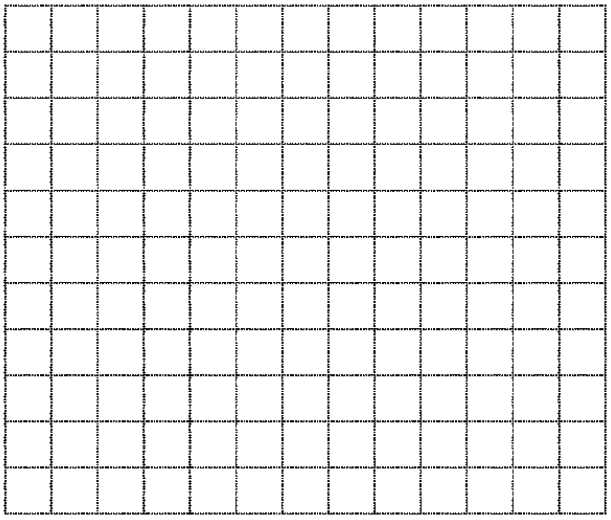
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية:

$y = (x+3)^2$



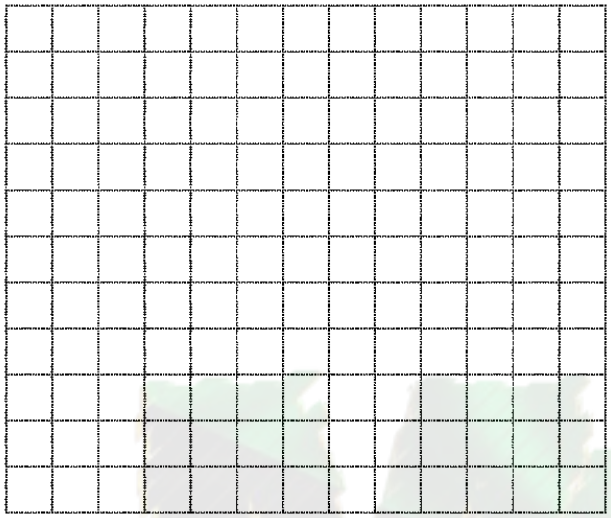
$y = -2(x+1)^2 - 4$



KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

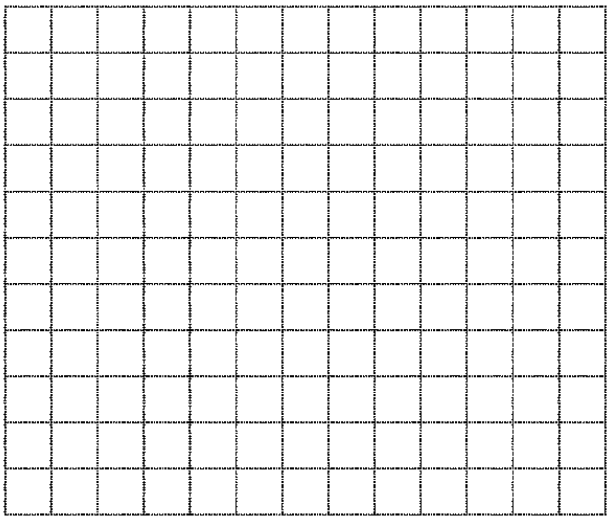
$$y = 3(x-2)^2 + 4$$



تمرين 2 **ارسم كل قطع مكافئ مستخدمًا المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.**

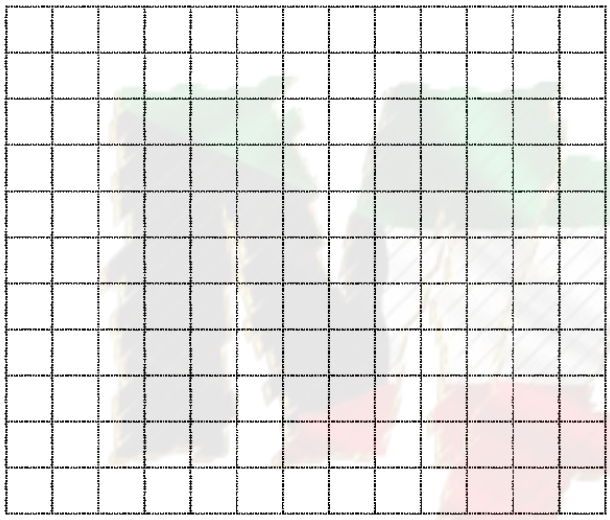
الرأس $V(0, 5)$ ويمر بالنقطة $P(1, -2)$

KuwaitMath.com



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

الرأس $V(-2, 6)$ والجزء المقطوع من محور السينات 2



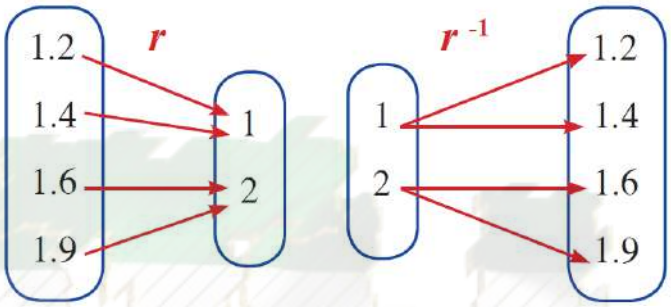
KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

إذا كانت r علاقة تصل بين عنصر a من مجال r وعنصر b من مدى r
فإن **معكوس العلاقة** r يصل من b إلى a.

إذا كان (a, b) زوج مرتب من علاقة r فإن (b, a) هو زوج مرتب من معكوس هذه العلاقة.

يبيّن المخطط أدناه علاقة r ومعكوسها r^{-1}
مدى العلاقة r هو مجال معكوس هذه العلاقة ومجال r هو مدى معكوسها.



معلومة:
يعبر عن معكوس العلاقة r بالرمز r^{-1}.

تمرين 1

ارسم بيانيًّا الدالة المعطاة ومعكوسها على محاور الإحداثيات نفسها. ثم اكتب معادلة المعكوس.

$$y = \frac{1}{2}x$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$y = \frac{x+1}{3}$

تمرين 2

اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي:

$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = 2(x+1) - 3$

$y = (x+5)^2 + 2$

$y = x^2 - 1$

$y = \frac{2x-1}{3}$

$y = \frac{x+5}{3}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x-h} + k$

ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$ كالتالي:

- عندما تكون k, h موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.

تمرين 1

ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

$y = \sqrt{x-4} + 2$

$y = -\sqrt{x-1}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

a ارسم بيانيًّا: $y = \sqrt{x-2} + 1$

عيّن المجال والمدى للدالة.

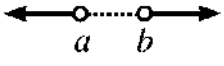
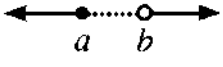
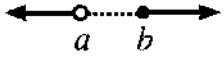
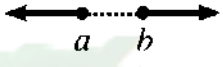
b إذا تم إزاحة بيان الدالة: $y = \sqrt{x}$، 5 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

يبيّن الجدول التالي كيفية كتابة اتحاد فترتين بصورة أخرى في بعض الحالات.

رمز الفترة	صورة أخرى لرمز الفترة	تمثيل الفترة على خط الأعداد
$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} / [a, b]$	
$(-\infty, a] \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} / (a, b]$	
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} / [a, b)$	
$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} / (a, b)$	

تمرين 1 أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

$(x-3)(2x+5) < 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$4x^2 + 12x + 9 \geq 0$

$-2x^2 + 5x - 3 > 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

$$h(x)=\sqrt{x^2-x}$$

$$q(x)=\sqrt{9-x^2}$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

أوجد مجموعة حل المتباينة:

$$\frac{x-1}{x^2-4} < 0$$

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4} > 0$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 **حلّ المتباينات التالية:**

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}\leq 0$$

$$\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}>0$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$$

$$\cdot \frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1

لنعتبر معادلة المستقيم $(d): y = -1$، أوجد بيانيًّا الحل لـ $f(x) = y, f(x) > y, f(x) < y$ في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

(b) $f(x) = x^2 + 1$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

لنعتبر معادلة المستقيم $(d): y = 2$، أوجد بيانيًّا الحل لـ $f(x) < y$, $f(x) \geq y$ في كلّ من الحالتين التاليتين:

(a) $f(x) = 3x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^2 - x - 2$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

الدوال مثل: $y = x^4$ ، $w = 0.014c^3$ هي دوال قوى.

تكون دوال القوى على الشكل:

$$y = ax^n \ , \ a \neq 0 \ , \ n \in \mathbb{Z}^+$$

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D **دالة زوجية** إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D \ , \ -x \in D$
2. $f(-x) = f(x)$

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D **دالة فردية**

إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D \ , \ -x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$

تمرين 1

اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

$y = x^3$

$y = -\sqrt[4]{x}$

$y = (x-1)^3 + 2$

$y = -x^4 + 3$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

a $f_1(x) = x^5$

b $f_2(x) = x$

c $f_3(x) = 2x^4$

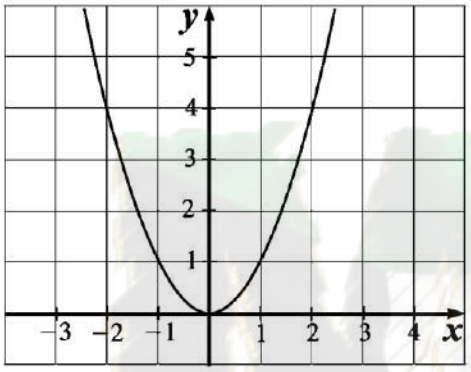
d $f_4(x) = (x+3)^3$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

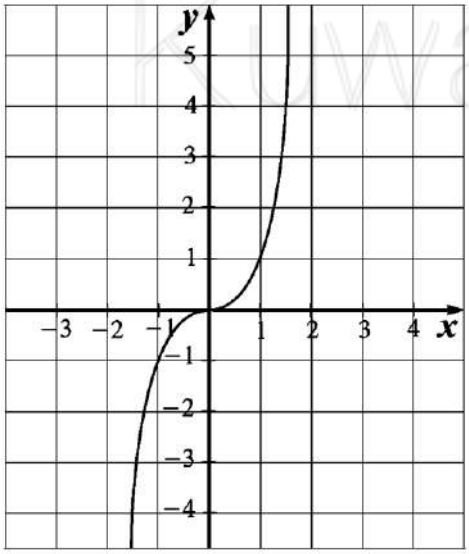
فمثلاً: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2, h(x) = x^4$ ، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.



وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

وكذلك: $h(-x) = (-x)^4 = x^4 = h(x)$



في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلاً: $\forall x \in \mathbb{R}$ ، الدالة: $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

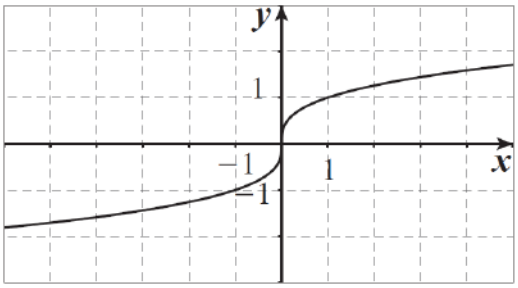
KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

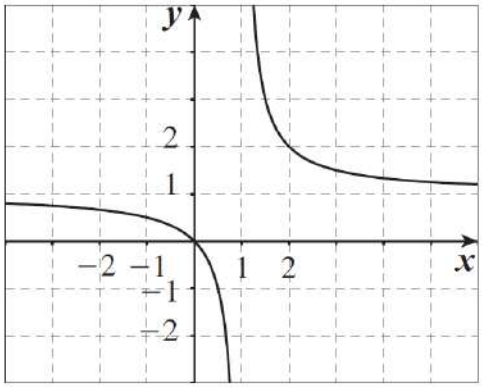
تمرين 1

الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

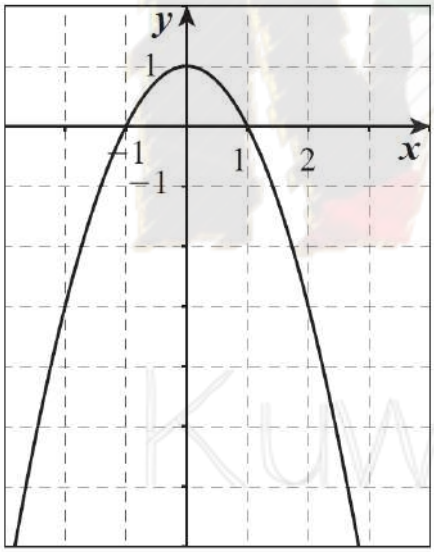
$y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



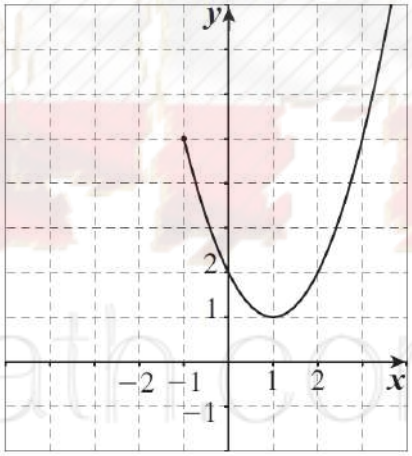
$y = \dfrac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$



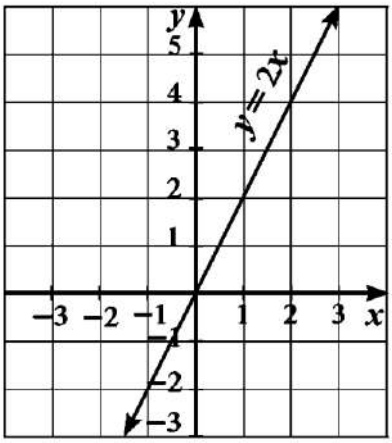
$y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



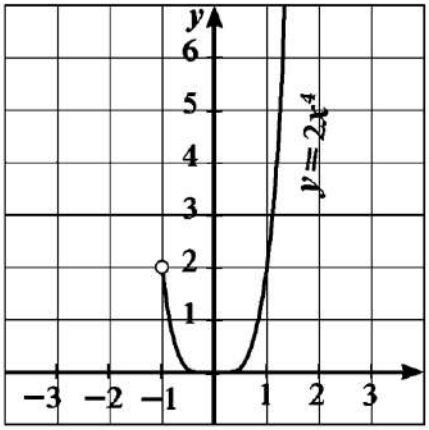
$y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1, \infty)$



$y = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$



$y = 2x^4, \quad x \in (-1, \infty)$



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

معكوس العلاقة (r^{-1}) — Inverse Relation (r^{-1})

تعرّفت في الوحدة الثانية على معكوس العلاقة. ونذكر بالنقاط التالية:

- إذا كانت علاقة r تربط عنصرًا a من المجال بعنصر b من المدى، فمعكوس العلاقة يربط العنصر b بالعنصر a.
- إذا كان (a, b) عنصرًا من العلاقة r فإن (b, a) هو عنصر من معكوس العلاقة r^{-1}.
- مجال معكوس العلاقة (r^{-1}) هو مدى العلاقة r.
- المستقيم الذي معادلته: $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.

بعض العلاقات تعتبر دوال لذلك إذا كان لدينا دالة فيمكننا إيجاد معكوسها مع ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن يكون المعكوس دالة.

تمرين 1 أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x-4}$

KuwaitMath.com

تمرين 2 أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

$y = \sqrt[3]{x-1}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$y = (x+2)^4 - 3$

$y = \frac{1}{3}x^4$

KuwaitMath.com

$y = \frac{1}{3}x^3$

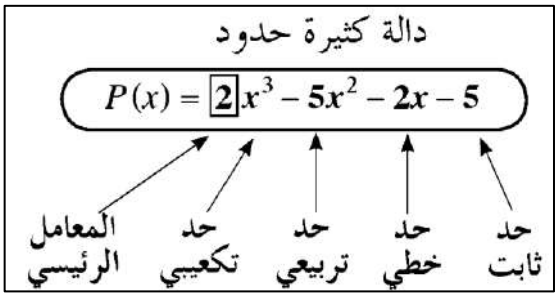
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ... , a_0 أعدادًا حقيقية



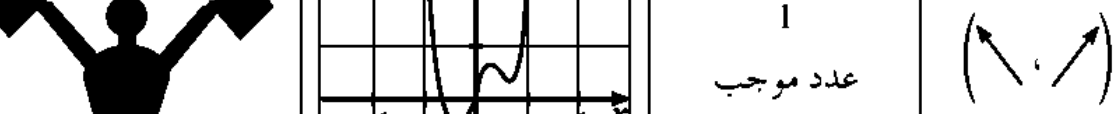
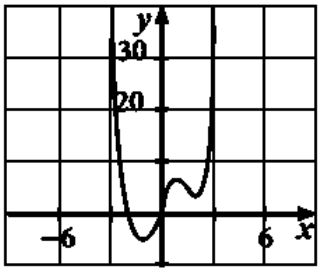
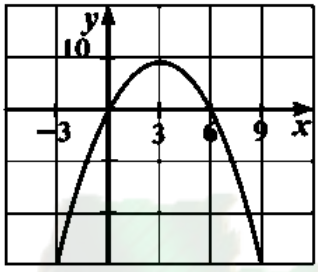
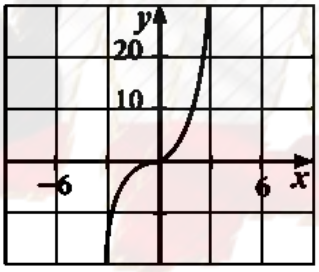
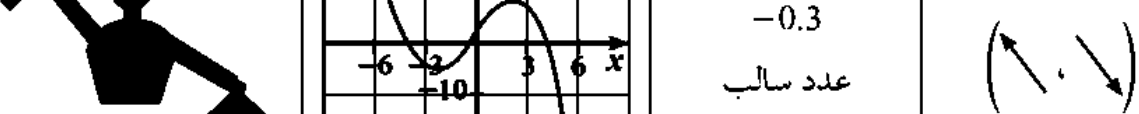
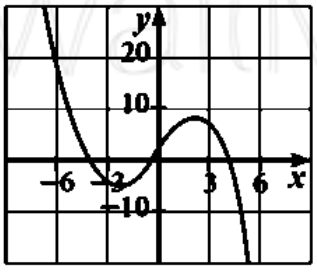
الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

تمرين 1

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

a $4x - 6x + 5$ **b** $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$ **c** $6 - 2x^5$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

الدرجة زوجي أم فردي	سلوك النهاية	المعامل الرئيسي موجب، سالب	الدالة وبيانها	نظام الإشارات
الرابعة زوجي		1 عدد موجب	 $y = x^4 - 3x^3 + 5x$	
الثانية زوجي		-1 عدد سالب	 $y = -x^2 + 6x$	
الثالثة فردي		1 عدد موجب	 $y = x^3$	
الثالثة فردي		-0.3 عدد سالب	 $y = -0.3x^3 + 4x + 2$	

تمرين 2 وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

$y = 3x + 2$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$f(x) = -x^2 + x$

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$

تمرين 3

وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

b $y = 4x^4 - 3x$

c $f(x) = 2x^3 - x$

d $h(x) = x - x^4$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 أوجد أصفار كل دالة مما يلي ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا لكل منها مراعيًا سلوك النهاية لبيان كل دالة.

$$y = (x-7)(x-5)(3-x)$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$y = x(x+2)^2$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$y = (x+1)^2(x-2)(x-1)$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية العامل

المقدار $(x-a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

تمرين 1

a اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: $1\ ,\ -2\ ,\ -4$

b اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: $0\ ,\ -2\ ,\ -4$

c اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و -1 صفر بسيط.

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2 **اكتب دالة كثيرة الحدود في الصورة العامة مستخدمًا الأصفار المعطاة:**

$-4, -1, 3$

$\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 2$ (مكرر مرتين)

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 **اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.**

$(x^2 - 3x - 40) \div (x + 5)$

معلومة:

إذا كان المقسوم كثيرة حدود من الدرجة n والمقسوم عليه من الدرجة الأولى فإن ناتج القسمة من الدرجة $(n-1)$ حيث $n \geq 1$

$(9x^3 - 18x^2 - x + 2) \div (3x + 1)$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملاً من عوامل $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$x + 2$

$x - 3$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل.

$y = x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \; ; \; x + 3$

$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \; ; \; x + 1$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x-a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

تمرين 2

استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x+1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

تمرين 3 استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6 \; ; \; a = -2$

KuwaitMath.com

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + 5 \; ; \; a = \frac{1}{2}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 حل كل معادلة مما يأتي وقرّب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضروريًّا.

$$6y^2 = 48y$$

$$x^3 + 13x = 10x^2$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$2x^3 - 5x^2 = 12x$

$2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية

بفرض أن: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \; ; a_n \neq 0$

حيث $a_n , a_{n-1} , ... , a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\left\{ \frac{a}{b} : a \right.$ عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $\left. a_n \right\}$

تمرين 1

استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

$x^3 - 3x + 2 = 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

الدالة:

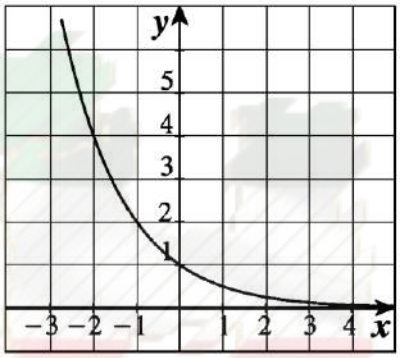
$y = ab^x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}^*$ (عدد ثابت)

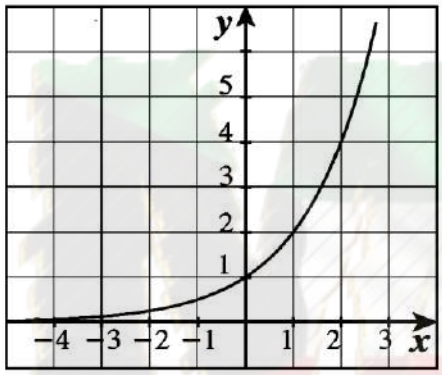
$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ (الأساس)

تسمى دالة أسية.

الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمدًا على قيمة b، كالتالي:



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.



عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

تمرين 1 **اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. ما النسبة المئوية لزيادة الدالة أو نقصانها؟**

$y = 1298(1.63)^x$

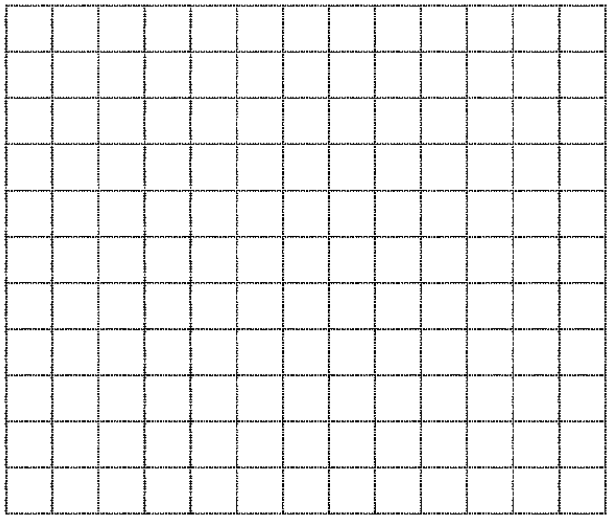
$f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

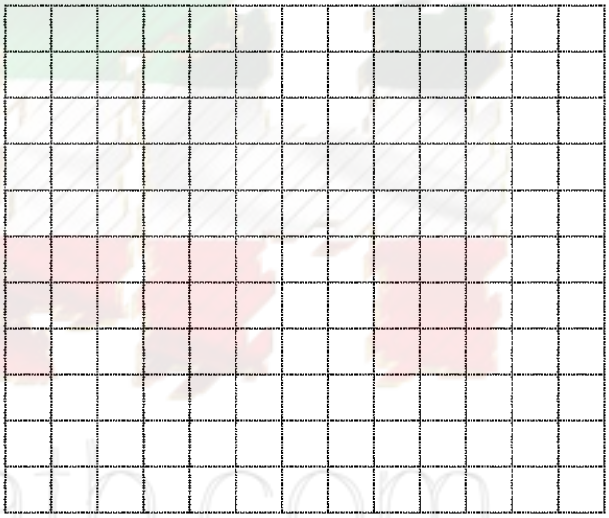
تمرين 2

مثّل كل دالة بيانيًّا. بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا محددًا العامل.

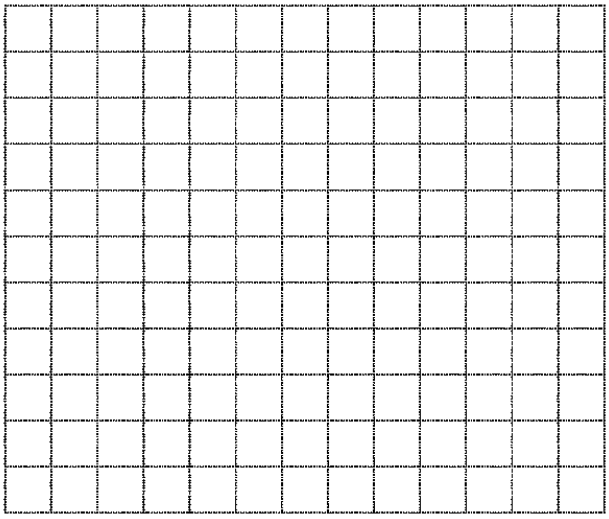
$f(x) = 2^x$



$y = 100(0.5)^x$



$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 اكتب دالة أسية: $y = ab^x$ ، يمر بيانها بالنقطتين: $Q(3,4)$, $P(2,2)$

تمرين 2 اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3,16)$ ، $H(2,4)$

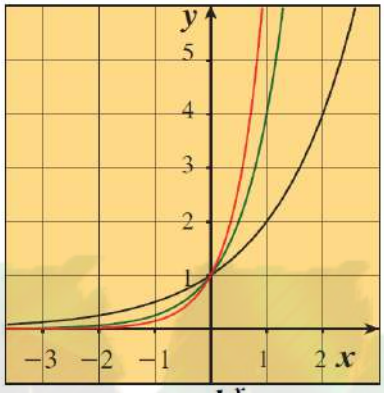
KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

التمثيل البياني للدوال الأسية Graphing Exponential Functions

يمكن دراسة تأثير القيم المختلفة لكل من a, b على الدالة الأسية $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$، $b \neq 1$, $b > 0$ باستخدام الرسوم البيانية كالتالي:

أولًا: عندما a موجب

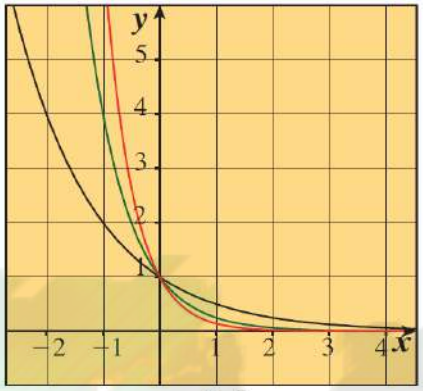


$y = b^x$

(1) $y = 2^x$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = 7^x$



$y = b^{-x}$

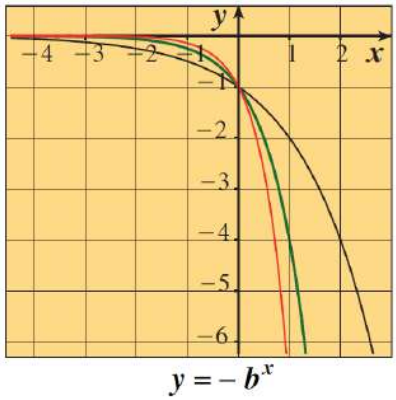
(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$

(5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$

(6) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

ثانيًا: عندما a سالب

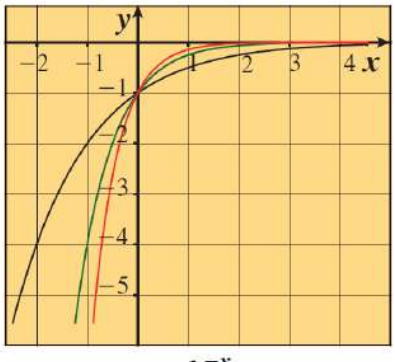


$y = -b^x$

(1) $y = -2^x$

(2) $y = -4^x$

(3) $y = -7^x$



$y = -b^{-x}$

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2)^{-x}$

(5) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -(4)^{-x}$

(6) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x = -(7)^{-x}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة $y=-b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^{x}$ في المحور الصادي.

ملاحظة: من أولًا وثانيًا نلاحظ أن بيان الدالة $y = -b^{x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^{x}$ في المحور السيني.

بعض الدوال الأسية هي على الصورة: $y = ab^{rx}$، حيث r ثابت، $r \neq 0$

تمرين 1

مثّل بيانيًّا كلًّا من: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$, $y = 5^{x}$ في نفس المستوى الإحداثي.

تمرين 2

مثّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

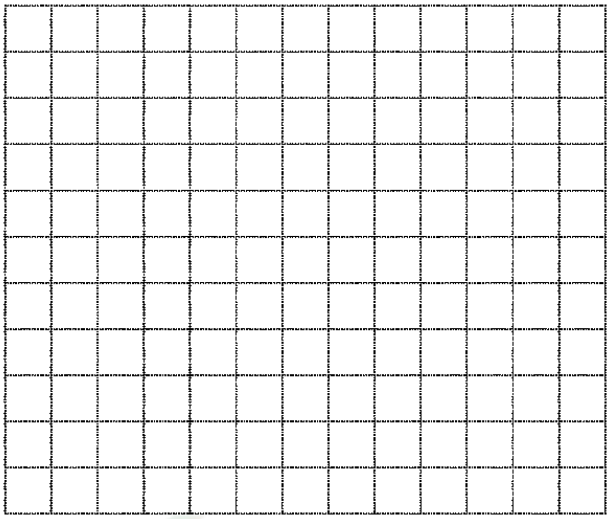
KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

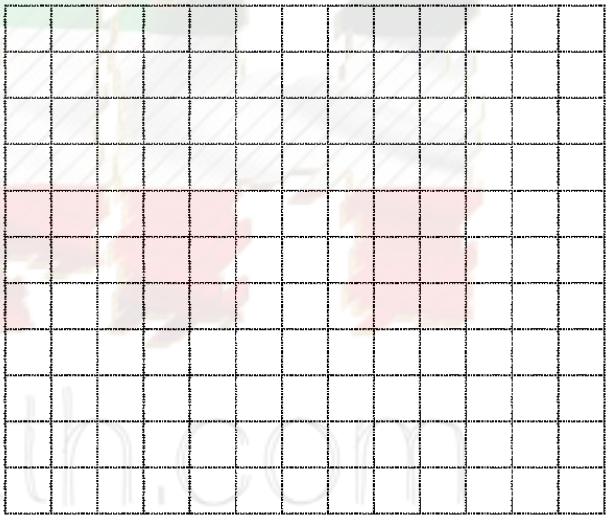
تمرين 3

مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية:

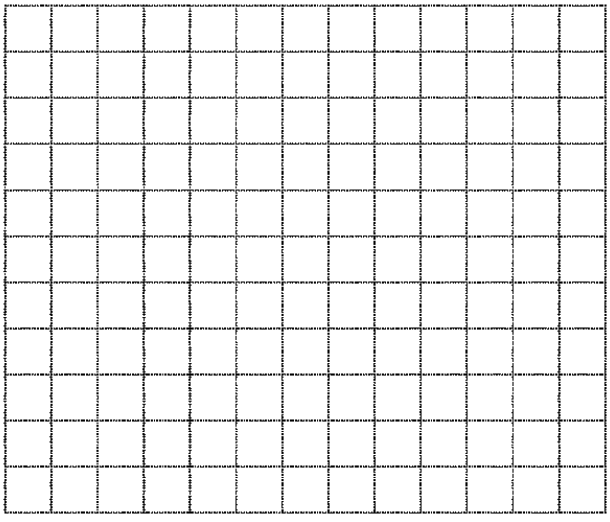
$y = 6^x + 3$



$y = -3^{x+4}$



$y = 2^{-x}$



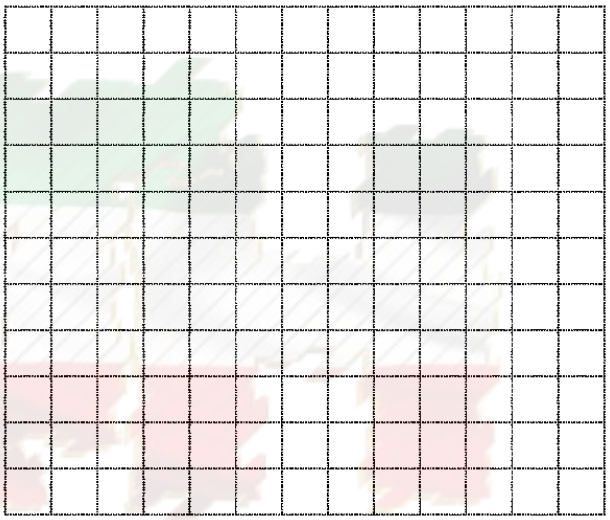
KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

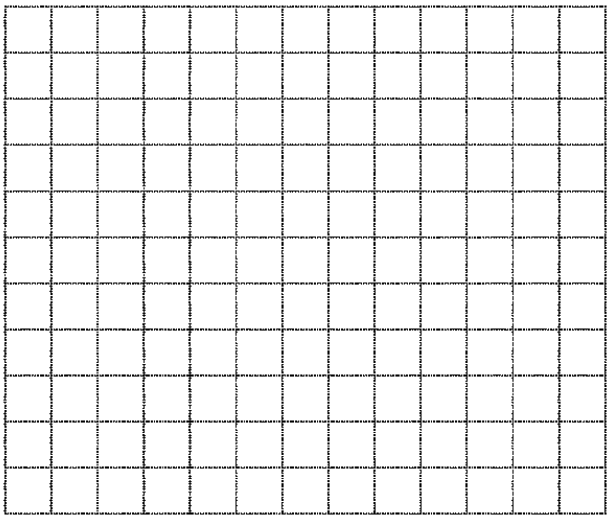
يمكنك تمثيل بيان العديد من الدوال الأسية وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع $y = ab^x$، حيث $b \neq 1$, $b > 0$، $a \neq 0$.
التمثيل البياني للدالة: $y = a(b)^{x-h} + k$، هو **انسحاب** لبيان الدالة $y = ab^x$ بمقدار h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

تمرين 1 **مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال الأسية التالية مستخدمًا دالة المرجع:**

$$y = (4)^{x-2} + 3$$

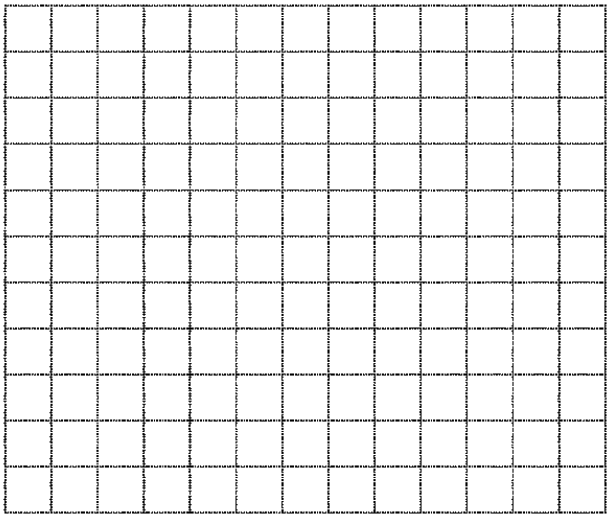


$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

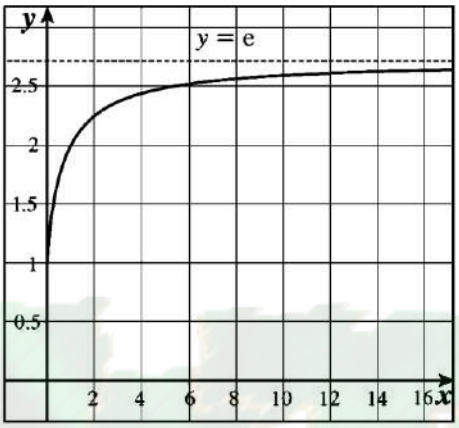
$$y = -2(3)^{2x} + 1$$



KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

عندما يأخذ x قيمًا أكبر فأكبر تقترب قيم y من 2.718 هذه القيمة تسمّى e وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريبًا 2.71828 تستخدم الدوال الأسية التي أساسها e لوصف النمو (التزايد) أو التضاؤل (التناقص) المستمر. وفي آلتك الحاسبة يوجد مفتاح e أو e^x أو $(e^{\square})$.



تمرين 1

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

e^3

$5e^6$

$\left(\frac{5}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}$

e^e

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

في الصورة الأسية $y = b^x$، b هو الأساس، x هو الأس، y هو الناتج.
للحصول على قيمة الأس x بمعلومية الأساس b والناتج y نستخدم ما يعرف **بالصورة اللوغاريتمية**.
حيث x تساوي لوغاريتم العدد y للأساس b ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على الصورة $x = \log_b y$.

تمرين 1

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

$\log 0.01$ $\log_2 4$ $\log_2 2^5$

$\log_{10} 100$ $\log_9 27$ $\log_{64} \frac{1}{32}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0 \ , \ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

تمرين 1 اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

$4^2 = 16$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

تمرين 2 اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$

$\log_2 128 = 7$

تمرين 3 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

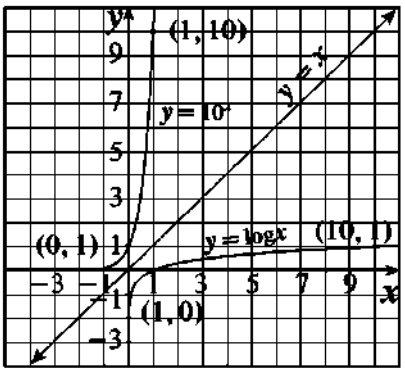
$g(x) = \log_7 (1 - x)$

$f(x) = \log_4 (x^2 + 1)$

$y = 2 + \log_5 (x - 2)$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .



الشكل المقابل يبيّن التمثيل البياني للدالتين:

$y = \log x$ ، $y = 10^x$.

لاحظ النقطتين (0, 1)، (1, 10) تنتميان إلى بيان $y = 10^x$

بينما (1, 0)، (10, 1) تنتميان إلى بيان $y = \log x$

كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم $y = x$.

لاحظ أن كلًّا من الدالتين معكوس للأخرى.

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x - h) + k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًّا، k وحدة رأسيًّا.

تمرين 4

ارسم بيان الدالة: $y = \log_3 (x - 3) + 1$ مستخدمًا دالة المرجع.

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

خواص اللوغاريتمات

$$\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$$

خاصية الضرب	$\log_b m\,n = \log_b m + \log_b n$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$
خاصية القوى	$\log_b m^k = k \log_b m \ , \ k \in \mathbb{R}$

ملاحظات:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b b^m = m$

حيث m , b عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

تمرين 1 اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد.

$\log 7 + \log 2$

$\log a + 3 \log b \ , (a > 0, b > 0)$

$4 \log M - \log N \ , (M > 0 \ , \ N > 0)$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2 **أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:**

$\log_5 \frac{y}{x}$, $(x > 0, y > 0)$

$\log \frac{a^2 b^3}{c^4}$, $(a > 0, b > 0, c > 0)$

$\log \sqrt{\frac{2x}{y}}$, $(x > 0, y > 0)$

KuwaitMath.com

تمرين 3 **أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة.**

a $\log_2(7b)$ **b** $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$ **c** $\log_7(a^3 b^4)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 4

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار.

$\log_2 4 - \log_2 16$

$\log_5 5 - \log_5 125$

KuwaitMath.com

$\log 5 + \log 8 - 2\log 2$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \iff \log_m a = \log_m b$$

تمرين 1 حلّ كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

$9^{2y} = 66$

$3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$

$\sqrt[7]{n^2} - 12 = 5$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+,\ b \neq 1,\ c \neq 1$$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

تمرين 2 **استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:**

$\log_2 7$ $\log_5 510$ $\log_4 1.116$

تمرين 3 **أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8**

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

كل معادلة تتضمن تعبيرًا لوغاريتميًّا تسمى معادلة لوغاريتمية ويمكن وضعها على الصورة:

$$\log_b y = x \qquad \forall\ y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$$

ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

تمرين 1 **حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:**

$$\log(2x) + \log(x-3) = \log 8$$

$$\log 6x - 3 = -4$$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\log_2(3x-5)=1$

$\log x^2-\log(x^2-x)=1\ ,\ \ x\in(1,\infty)$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

فالدالة $y = e^x$ لها معكوس هو $y = \log_e x$

ويسمى دالة اللوغاريتم الطبيعي ورمزه:

$y = ln\, x$

وتقرأ y تساوي اللوغاريتم الطبيعي لِـ x

تمرين 1 اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

$3\, ln\, 5$ $\quad 5\, ln\, m + 3\, ln\, n \;\; , \;\; (m > 0 \;\; , \;\; n > 0)$ $\quad 2\, ln\, 8 - 3\, ln\, 4$

تمرين 2 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة مما يلي:

$3e^{2x} = 12$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$2e^{3x-2} + 4 = 16$

$4e^{x+2} = 32$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 1 حلّ كل معادلة مما يلي:

$ln\,3x = 6$

$2\,ln\,2x^2 = 1$

$ln(2x-1) = 0$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تمرين 2

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a $e^{x+1} = 30$

b $2^{2x-3} + 4 = 7$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تقسم الكميات إلى نوعين:

كميات قياسية (عددية): هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي ووحدة قياس**.

مثل: الحرارة – المسافة – العمر – الحجم – الزمن – الكتلة.

فمثلاً: طول مسطرة يساوي 30 cm

كميات متجهة: هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي واتجاه**.

مثل: السرعة – العجلة – الإزاحة – القوة – الوزن.

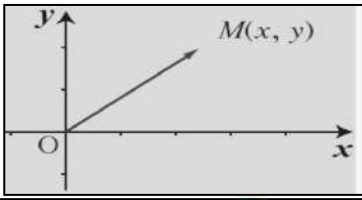
القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ لها **نقطة بداية** P و **نقطة نهاية** Q.

يمثّل الرمز $\|\overrightarrow{PQ}\|$ **طول القطعة الموجهة** $\overrightarrow{PQ}$

أي المسافة بين نقطة البداية P ونقطة النهاية Q.

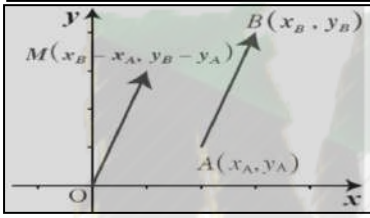
اتجاه $\overrightarrow{PQ}$ هو من P إلى Q.

القطعة الموجهة $\overrightarrow{QP}$ لها طول $\overrightarrow{PQ}$ نفسه ولكن في **الاتجاه المعاكس** أي من Q إلى P.



تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ **التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها** $M(x, y)$ **تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب** (x, y)



تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

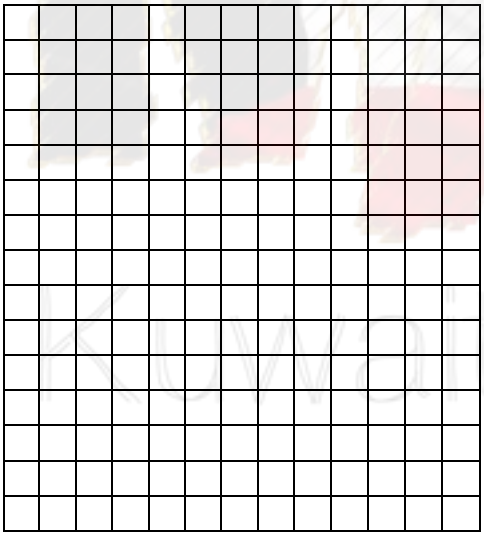
حيث $M(x_B - x_A, y_B - y_A)$

حاول أن تحل

1 ليكن: $A(1,-3), B(2,2), C(2,3), D(-2,-1)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثّل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$

b متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$. أوجد إحداثيات K



(1) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(-3,4), B(2,-1), C(3,5)$

(a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكلّ من: $<\overrightarrow{AB}>, <\overrightarrow{BC}>, <\overrightarrow{CA}>$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث $M(4,3)$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{BE}$

فأوجد إحداثيات E بفرض أن $E(x,y)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تكون قطعتان موجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه

ولكل قطعتين موجهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

خاصية

إذا كانت القطعتان الموجهتان $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ متكافئتين، فإن الشكل $ABDC$ هو متوازي أضلاع حيث النقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة.

تعريف المتجه

المتجه هو مجموعة غير منتهية من القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.

حاول أن تحل

2 إذا كانت $F(5, 13), E(3, 11), D(-2, -7)$

فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $< \overrightarrow{DE} >$, $< \overrightarrow{ED} >$, $< \overrightarrow{EF} >$

KuwaitMath.com

(2) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(-3,2), F(2,-1), G(4,-2)$

أوجد مركّبات كل من المتجات التالية: $< \overrightarrow{EF} >, < \overrightarrow{GF} >, < \overrightarrow{EG} >$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{U}=<x,y>$ معيار (طول) يرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{U}\|$

ويعطى بالعلاقة: $\|\overrightarrow{U}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

يحدد اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

حيث $0^o \le \theta < 360^o$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$\theta=\begin{cases}\alpha & \text{عندما } x>0\ ,\ y>0\\ 180^o-\alpha & \text{عندما } x<0\ ,\ y>0\\ 180^o+\alpha & \text{عندما } x<0\ ,\ y<0\\ 360^o-\alpha & \text{عندما } x>0\ ,\ y<0\end{cases}$$

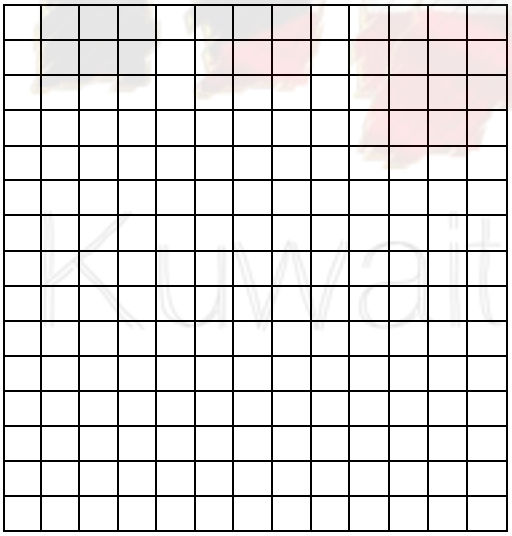
وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|$

حاول أن تحل

3 لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

a) $\overrightarrow{m}=<2,2>$ b) $\overrightarrow{n}=<-1,-2>$

c) $\overrightarrow{p}=<-2,3>$ d) $\overrightarrow{q}=<1,-4>$



(3) (a) لكل من المتجهات التالية: $\overrightarrow{u}=<3,2>, \overrightarrow{v}=<-2,4>, \overrightarrow{w}=<-3,-2>, \overrightarrow{t}=<2,-3>$

ارسم متجه الموضع.

(b) أوجد طول كل متجه وقياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

راجع الملاحظات في كتاب الطالب صفحة 174

تعريف

المتجه $\overrightarrow{U} = < x,y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:

$$\| \overrightarrow{U} \| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\overrightarrow{v} = < x \ , \ \frac{12}{13} >$. فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\overrightarrow{v}$ متجه وحدة.

KuwaitMath.com

(4) إذا كان $\overrightarrow{u} = < x , \frac{3}{5} >$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\overrightarrow{u}$ متجه وحدة.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

ليكن: $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >, B = < x_B , y_B >$

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \iff x_A = x_B \ , \ y_A = y_B$

حاول أن تحل

5 إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$

حاول أن تحل

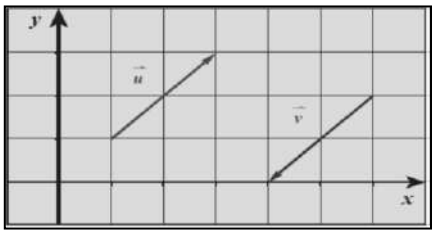
6 ليكن المتجهان $\overrightarrow{B} = < -1, 3 >$ ، $\overrightarrow{A} = < -2x + 3, 4y - 1 >$ ، حيث x , y عددان حقيقيان.
أوجد قيمتا x , y اللتين تحققان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$.

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,-1), B(5,-4), C(2,4), D(4,1)$

أثبت أن: $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$

(6) ليكن: $\overrightarrow{B} = < 3x - 2, 4y + 1 >$ ، $\overrightarrow{A} = < 4, -3 >$ أوجد قيمتي x, y بحيث يكون: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

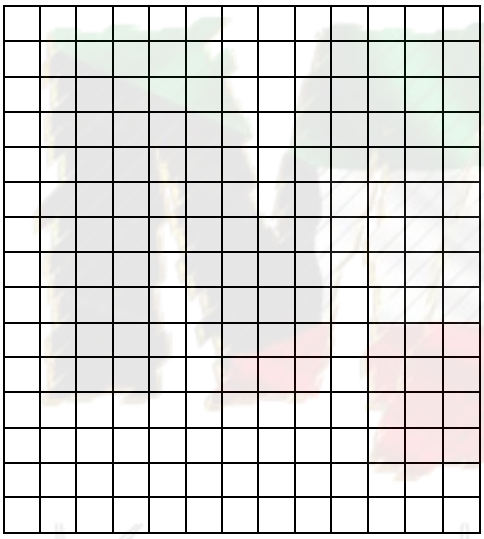


- إذا كان $\vec{u} = < a, b >$ فإن المتجه $\vec{v} = < -a, -b >$ هو المتجه المعاكس لـ $\vec{u}$
- مركبات المتجه المعاكس هي المعكوس الجمعي لمركبات المتجه.
- المتجه $< \overrightarrow{BA} >$ هو متجه معاكس للمتجه $< \overrightarrow{AB} >$
- $< \overrightarrow{AB} > = - < \overrightarrow{BA} >$

حاول أن تحل

7 ارسم متجه الموضع للمتجه $\vec{u}$ حيث مركباته $< 1, 2 >$.

من النقطة $A(2, -1)$ ارسم متجهًا مساويًا للمتجه $\vec{u}$ ومتجهًا معاكسًا للمتجه $\vec{u}$ واكتب مركباتهما.



KuwaitMath.com

(7) لنأخذ في المستوى الإحداثي: $A(5,2), B(-2,6), C(-3,3), D(4,-1)$

أثبت أن: $< \overrightarrow{AB} >$ معاكس لـ $< \overrightarrow{CD} >$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\vec{u}$ متجه غير صفري، k عدد حقيقي غير صفري $(k \in \mathbb{R}^*)$

إن ناتج ضرب المتجه $\vec{u}$ بالعدد k هو متجه ونرمز إليه بـ $k\vec{u}$

$\because \vec{u} = < x, y > \quad \therefore \quad k\vec{u} = < kx, ky >$

ملاحظة:

- إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$، فإن $k\vec{u} = \vec{0}$ والعكس صحيح.
- يكون للمتجهين $\vec{u}$, $k\vec{u}$ الاتجاه نفسه إذا كان $k > 0$ ويكون $k\vec{u}$ في الاتجاه المعاكس للمتجه $\vec{u}$ إذا كان $k < 0$
- تعطى العلاقة بين طولي المتجهين $\vec{u}$, $k\vec{u}$ كالتالي: $\| k\vec{u} \| = |k| \, \| \vec{u} \|$.

خواص

1. يكون للمتجهين غير الصفريين $< \overrightarrow{CD} >$, $< \overrightarrow{AB} >$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{CD} >$
2. يكون للمتجهين غير الصفريين $< \overrightarrow{CD} >$, $< \overrightarrow{AB} >$ اتجاهين متعاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{CD} >$
3. تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{AC} >$

حاول أن تحل

8. إذا كان $\vec{B} = < 3, -2 >$ فأوجد:

a) $3\vec{B}$ b) $-5\vec{B}$ c) $\frac{3}{2}\vec{B}$

حاول أن تحل

9. باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1)$, $L(2,3)$, $M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

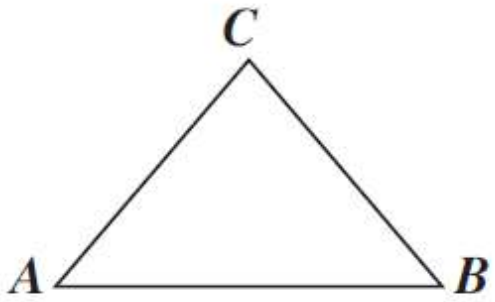
(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(2,-3), B(-1,3), C(1,-1)$

أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

10 ABC مثلث، ارسم $\overrightarrow{AD}$ بحيث $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$،
ثم ارسم $\overrightarrow{BH}$ بحيث $\overrightarrow{BH} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$



KuwaitMath.com

(10) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,2), B(1,5), C(7,4)$

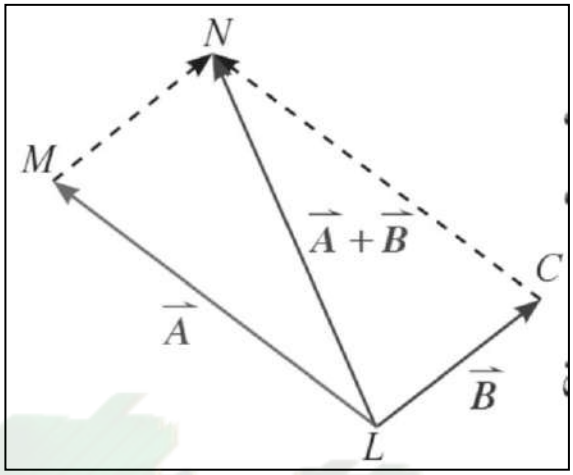
(a) أوجد إحداثيات النقطة D حيث: $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

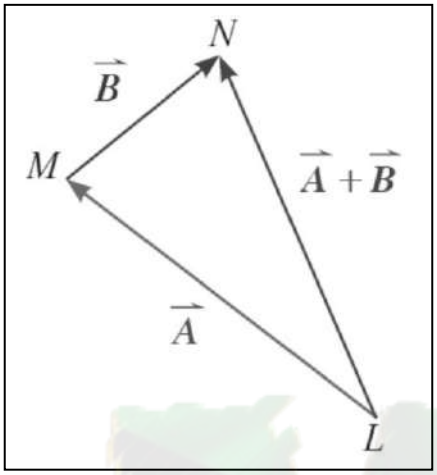
(b) أوجد إحداثيات النقطة E حيث: $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

(c) أثبت أن: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$ لهما الاتجاه نفسه.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

لأي ثلاث نقاط في المستوى تسمى العلاقة: $<\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{MN}>=<\overrightarrow{LN}>$ علاقة شال.

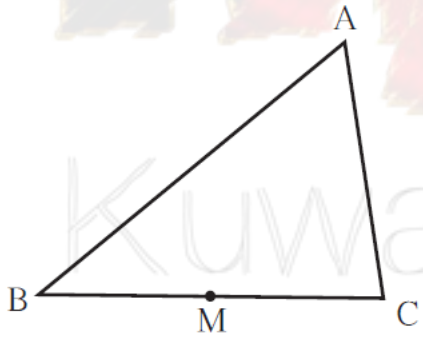




(2) في المثلث ABC المقابل، M منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{BP}>=<\overrightarrow{MA}>+<\overrightarrow{MC}>$

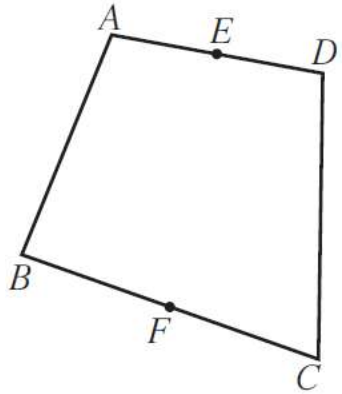
(b) عيّن النقطة Q حيث: $<\overrightarrow{BQ}>=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{MB}>$



(3) في الشكل الرباعي $ABCD$ المقابل E منتصف $\overline{AD}$ و F منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{CP}>=<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{BA}>$

(b) أثبت أن: $<\overrightarrow{CP}>=<\overrightarrow{CE}>+<\overrightarrow{BE}>$



KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

لأي ثلاثة متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في المستوي

- خاصية الإبدال في جمع المتجهات: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- خاصية العنصر المحايد $\vec{0}$: $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
- خاصية التجميع في جمع المتجهات: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- خاصية المعكوس الجمعي: $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
- خاصية الحذف: $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}$
- خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر: $K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

(4) A, B, C, D نقاط في المستوى، بسّط:

(a) $2<\overrightarrow{AB}>+4<\overrightarrow{BC}>+2<\overrightarrow{CD}>+2<\overrightarrow{DA}>$

(b) $2<\overrightarrow{AB}>-3<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{AD}>+2<\overrightarrow{BD}>$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تعريف

إذا كان $\vec{A}=<x_A,y_A>$, $\vec{B}=<x_B,y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن مجموع هذين المتجهين هو المتجه $<x_A+x_B,y_A+y_B>$ ويرمز له بالرمز $\vec{A}+\vec{B}$

أي أن: $\vec{A}+\vec{B}=<x_A+x_B,y_A+y_B>$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{A}=<4,-2>,\vec{B}=<-7,5>$ فأوجد.

a $\vec{A}+\vec{B}$

b $3\vec{A}+5\vec{B}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تعريف

إذا كان $\vec{A} = < x_A, y_A >, \vec{B} = < x_B, y_B >$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = < x_A - x_B \ , y_A - y_B >$$

حاول أن تحل

6 إذا كان $\vec{A} = <-3, 0>, \vec{B} = < 5, -9 >$. فأوجد:

a $\vec{A} - \vec{B}$

b $-3\vec{A} + 4\vec{B}$

KuwaitMath.com

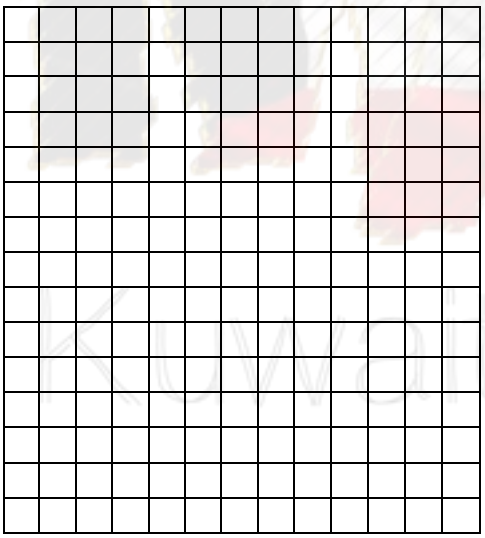
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تعريف

- المتجه $\vec{i} = < 1,0 >$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(1, 0)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور السيني $(x-\text{axis})$»
- المتجه $\vec{j} = < 0,1 >$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(0, 1)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور الصادي $(y-\text{axis})$»

(7) مثّل النقاط التالية في المستوى الإحداثي حيث O نقطة الأصل، $\vec{i}, \vec{j}$ متجهي الوحدة الأساسيان

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OC} = -4\vec{i} - \vec{j}$



KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قانون

إذا كان $\vec{A} = < x_A , y_A >, \vec{B} = < x_B , y_B >$ متجهين في المستوي الإحداثي

فإن $\vec{A} \,.\, \vec{B} = x_A \,.\, x_B + y_A \,.\, y_B$

فإذا كان: $\vec{A} = < x_A , y_A >$ فإن $\vec{A} \cdot \vec{A} = x_A^2 + y_A^2 = \| \vec{A} \|^2$

(2) لنأخذ: $\vec{u} = < 2, -1 >, \vec{v} = < -3, 2 >, \vec{w} = < 1, 2 >$ أوجد:

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ (c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز $\vec{A}\cdot\vec{B}$ يساوي ناتج ضرب طولي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما.

أي أن: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\times\|\vec{B}\|\times\cos(\vec{A},\vec{B})$, $0^\circ\leqslant m(\vec{A},\vec{B})\leq 180^o$

مثال (2)

ABC مثلث متطابق الأضلاع. M منتصف $\overline{BC}$ أوجد:

a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ c $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CB}$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نتيجة (1)

$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ حيث $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$

حاول أن تحل

3 إذا كانت النقاط $A(6,-1)$, $B(3,2)$, $C(2,1)$

a اكتب كلًّا من المتجهين $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}$, $\vec{j}$

b أوجد قيمة $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{A} = < 3, -1 >$, $\vec{B} = < x, -2 >$ وكان $\vec{A} \perp \vec{B}$ فأوجد قيمة x

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نتيجة (2)

$\vec{A} \neq \vec{0}\ ,\ \vec{B} \neq \vec{0}$ حيث $\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B} \Longleftrightarrow \vec{A} = k\,\vec{B}$

ملاحظة: $\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B} \Longleftrightarrow x_A \cdot y_B - x_B\, y_A$

حيث: $\vec{A} \neq \vec{0}\ ,\ \vec{B} \neq \vec{0}\ ,\ \vec{A} = < x_A , y_A >, \vec{B} = < x_B , y_B >$

حاول أن تحل

5 a أثبت أن: $\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B}$ حيث $\vec{A} = < 3, -2 >\ ,\ \vec{B} = < 6, -4 >$

b إذا كان $\vec{A} \mathbin{/\!/} \vec{B}$ ، $\vec{A} = < \frac{7}{3} , \frac{2}{3} >\ ,\ \vec{B} = < x , \frac{4}{5} >$ فأوجد x

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى، k عدد حقيقي.

- خاصية الإبدال $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$
- خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري $\vec{A}\cdot(k\vec{B})=(k\vec{A})\cdot\vec{B}=k(\vec{A}\cdot\vec{B})$
- خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها $\vec{A}\cdot(\vec{B}\pm\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}\pm\vec{A}\cdot\vec{C}$

حاول أن تحل

6 $\vec{A}, \vec{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\vec{A}\|=3, \|\vec{B}\|=4, \vec{A}\cdot\vec{B}=5$

أوجد قيمة $(3\vec{A}-2\vec{B})\cdot(-\vec{A}+3\vec{B})$

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قانون

إذا كان $\vec{A}, \vec{B}$، متجهين وكان $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$ فإن:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\| \vec{A} \| \bullet \| \vec{B} \|} \quad , 0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$$

حاول أن تحل

7 إذا كان $\| \vec{A} \| = 3, \| \vec{B} \| = 2, \vec{A} \bullet \vec{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}, \vec{B})$

KuwaitMath.com

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u} = < 2, -2 >, \vec{v} = < -\sqrt{2}, 0 >$

أوجد $m(\vec{u}, \vec{v})$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مراحل البحث الإحصائي هي:

1. جمع البيانات.
2. عرض البيانات (جدوليًا وبيانيًا).
3. وصف البيانات وتحليلها.
4. تفسير النتائج واتخاذ قرارات.

المجتمع الإحصائي Statistic Population

هو مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة، ويمكن أن تكون مفردات المجتمع الإحصائي بشرية أو غير بشرية.

كما أن المجتمع الإحصائي يمكن أن يكون منتهيًا (عدد وحداته محدود) أو غير منته (عدد وحداته غير محدود). ويشترط أن يعرّف مجتمع الدراسة تعريفًا محددًا وواضحًا ولا يحمل أي تأويل.

حاول أن تحل

1. **في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.**
   - a. **لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.**
   - b. **مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.**

المتغير Variable

هو **الصفة (أو الصفات) محور الدراسة** في مجتمع إحصائي معيّن. فمثلًا في دراسة عن طلاب الصف الحادي عشر في دولة الكويت، قد يختلف الطلاب من حيث الفرع: أدبي أو علمي، الجنس: أنثى أو ذكر، الجنسية: كويتي أو غير كويتي، الطول، الوزن، لون العيون، ... وهذه الصفة **تتغير** من وحدة إلى أخرى في مجتمع الدراسة.

أساليب جمع البيانات Ways to Collect Data

عند القيام بدراسة إحصائية يقوم الباحث بتحديد المجتمع محل الدراسة ثم يبدأ بجمع البيانات.

هناك أساليب مختلفة لجمع البيانات تعتمد على نوع الدراسة وخصائص المجتمع ومن هذه الأساليب:

1 – الحصر الشامل Comprehensive Inventory

هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة. يتميز الحصر الشامل بدقة نتائجه وخلوه من الأخطاء. (مثل: نتائج الطلاب في الصف الحادي عشر علمي نهاية العام الدراسي). ومن عيوب الحصر الشامل أنه يتطلب وقت وجهد كبيرين وفرق عمل ونفقات وتكاليف مرتفعة. كما أن الحصر الشامل لا يمكن إجراؤه في المجتمعات غير المنتهية (مثل مجتمع الطيور) وأكثر من ذلك لا يمكن استخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (مثل: عملية سحب الدم لمعرفة كمية السكر الموجودة فيه).

حاول أن تحل

2. **اكتب مثالًا يبين:**
   - a. **دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.**
   - b. **دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.**

2 – المعاينة Sampling

هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

حاول أن تحل

3 **حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:**

a **عدد أعضاء فريق كرة القدم.**

b **الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)**

c **أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.**

d **تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.**

طرق جمع البيانات Ways To Collect Data

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المواليد في العالم سنة 2010 عبارة عن مجتمع غير منته. (a) (b)

(2) وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر. (a) (b)

(3) يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات. (a) (b)

(4) عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كمية مستمرة. (a) (b)

(5) عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كيفية مرتبة. (a) (b)

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

العينة العشوائية Random Sample

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة. تختلف العينة بحسب طبيعة المجتمع الإحصائي محل الدراسة. في ما يلي بعض من العينات العشوائية:

1 – العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample

إذا تضمن المجتمع الإحصائي عددًا n من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقًا من عينة عشوائية عدد مفرداتها (حجمها) m، يكون لدينا عينة عشوائية بسيطة والشيء الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العيّنة.

توجد طرائق متعددة لاختيار عينة عشوائية بسيطة مثل: جدول الأعداد العشوائية، آلات حاسبة متخصصة، برامج إحصائية في الحاسوب مثل (IRT, SPSS, Microsoft Excel).

مثال (1)

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

1 **في مثال (1) إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي الأعداد التي سوف يحصل عليها؟**

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

2 – العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

يوجد مجتمعات إحصائية تتكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا لذا نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة فنحصل على عينة عشوائية طبقية تمثل المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

لسحب عينة عشوائية طبقية حجمها m من مجتمع إحصائي حجمه n، حيث $m \leq n$ يكون:

$$\frac{m}{n} = \text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

3 في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداريًا مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيبًا مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضًا مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملًا مرقمين من 461 إلى 500.

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

KuwaitMath.com

(1) للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية. (a) (b)

(2) لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية. (a) (b)

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

3 – العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

واحدة من العينات الأكثر استخدامًا هي العينة العشوائية المنتظمة حيث يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت ومنتظم. ترقم هذه المفردات ترقيمًا متسلسلًا ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى **فترة المعاينة**. نستخدم العينة العشوائية المنتظمة في المجتمع الإحصائي حيث تكون جميع المفردة متجانسة، ولإيجاد طول الفترة نستخدم القاعدة التالية:

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية أو عن طريق المختبر الإحصائي ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

حاول أن تحل

5 **يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.**

KuwaitMath.com

(3) حجم المجتمع $= \frac{\text{كسر المعاينة}}{\text{حجم العينة}}$ (a) (b)

(4) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة (a) (b)

(5) إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43، فالمفردة الخامسة تساوي 322 (a) (b)

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

القطاعات الدائرية Pie Chart

يمكن تمثيل البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

نستخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية لعرض التوزيع التكراري لبيانات كيفية وتكون هذه البيانات مقسمة إلى فئات متعددة. عند صنع القطاعات الدائرية تقسّم الدائرة إلى قطاعات عددها يساوي عدد الفئات في البيانات ويمثل كل قطاع دائري واحدة من هذه الفئات، قياس الزاوية المركزية لكل قطاع يعطى بالقاعدة:

$$\text{قياس الزاوية المركزية لقطاع} = \text{التكرار النسبي} \times 360^\circ$$

$$\text{حيث التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار القيمة (أو الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

وكل قطاع من الدائرة يأخذ لونًا أو تظليلًا مختلفًا عن الآخر.

(1) أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبيّنة في الجدول التالي:

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22

(a) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

(b) اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

المنحنى التكراري والمدرج التكراري

Frequency Curve and Histogram

يستخدم المدرج التكراري والمنحنى التكراري في تمثيل جدول تكراري ذي فئات بحيث إن كل مستطيل يمثل فئة من الفئات.

قاعدة المستطيل على الخط الأفقي هي طول الفئة، وارتفاعه الرأسي يساوي قيمة تكرار الفئة.

حاول أن تحل

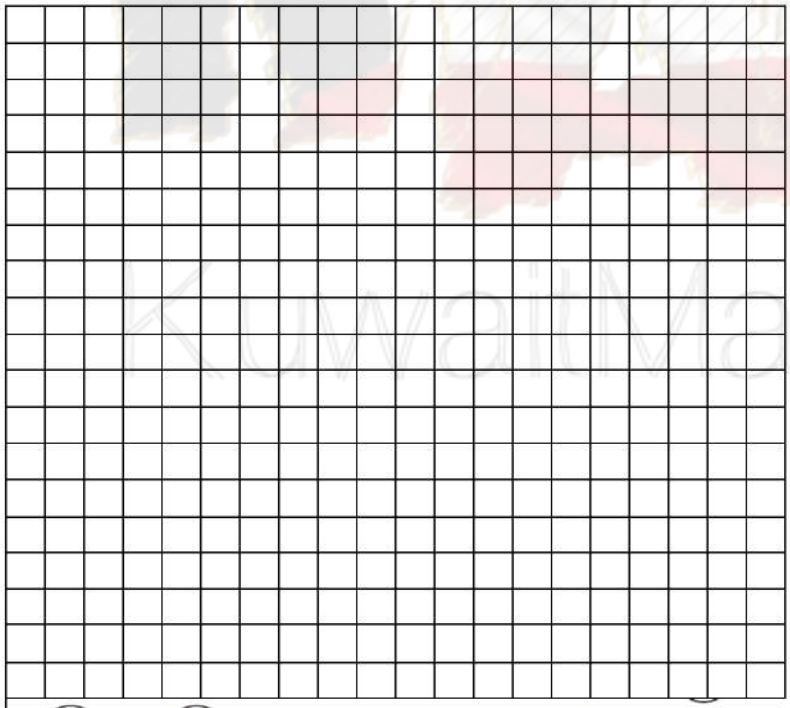
2 يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالبًا بالسنتيمتر (cm)

الفئة	155—	160—	165—	170—	175—	180—	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30

a أوجد مراكز الفئات.

b ارسم المنحنى التكراري.

c ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.



(1) التكرار النسبي يساوي: قياس الزاوية المركزية لقطاع $\times 360^\circ$ (a) (b)

(2) التكرار النسبي $= \dfrac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}}$ (a) (b)

(3) مركز فئة 20— طولها 10 يساوي 30 (a) (b)

(4) لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري. (a) (b)

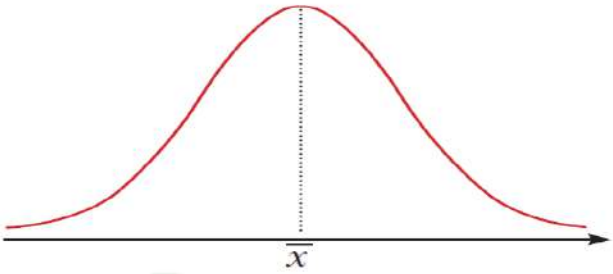
(5) يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية. (a) (b)

KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقًا توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال.
والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي:



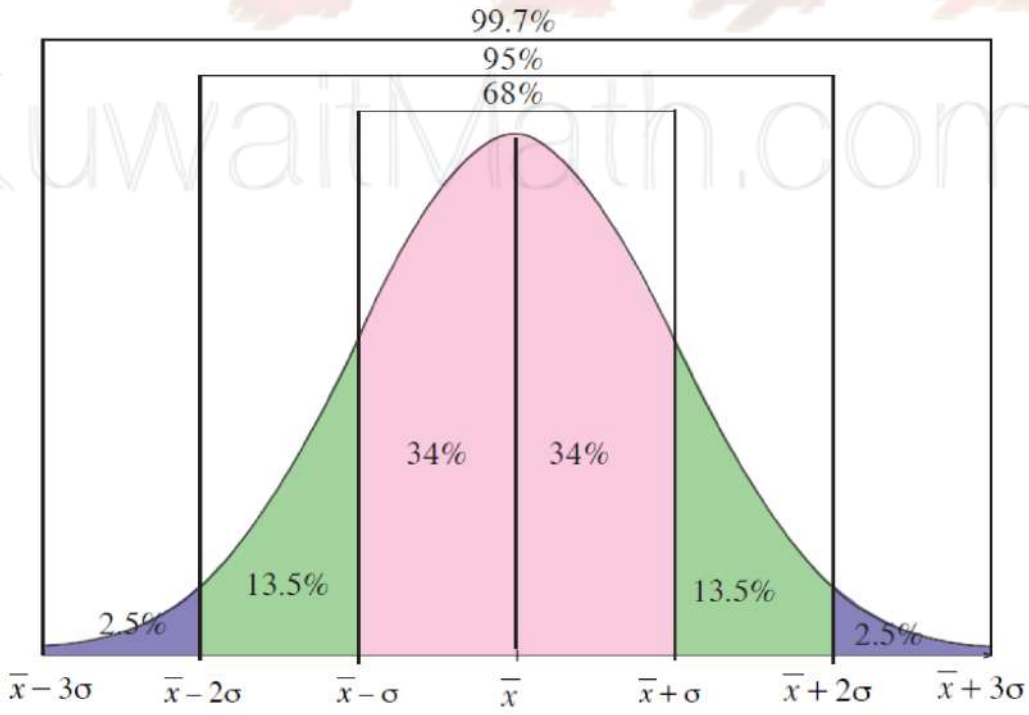
من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

القاعدة التجريبية Empirical Rule

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة.

على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:



KuwaitMath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

1 لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارًا بانحراف معياري 115 دينارًا.

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 دينارًا؟ فسّر ذلك.

(6) يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو 1 400 kg بانحراف معياري 200 kg. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي:

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن 1 000 kg.

Kuwaitmath.com

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

القيمة المعيارية Standardized Value

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًا مقارنة قيم هذه المفردات ببعضها بعضًا بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية مناظرة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} \qquad z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

حاول أن تحل

1 جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

KuwaitMath.com

(4) في المدينة A يزن أحد الرجال 75 kg مع متوسط حسابي للرجال 70 kg وانحراف معياري 5 kg.
وفي المدينة B يزن أحد الرجال 80 kg مع متوسط حسابي للرجال 76 kg وانحراف معياري 8 kg.
أوجد القيمة المعيارية z_1 لوزن 75 kg في المدينة A والقيمة المعيارية z_2 لوزن 80 kg في المدينة B.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .