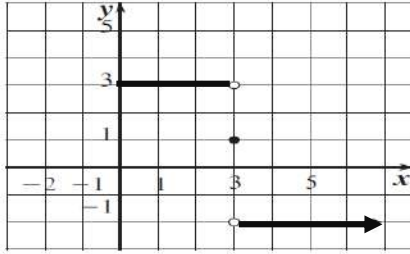




بند (1 - 1) النهايات بنود موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) (b)



$$\lim_{y \rightarrow 3^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{y \rightarrow 3^-} f(x) = 3$$

(2) $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + 5y + 6}{y + 2} = 5$ (a) (b)

$$\lim_{y \rightarrow 2} (y + 2) = 2 + 2 = 4, 4 \neq 0$$

نتحقق من أن نهاية المقام لا تساوي صفر

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + 5y + 6}{y + 2} = \frac{(2)^2 + 5(2) + 6}{2 + 2} = 5$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} = 0$ (a) (b)

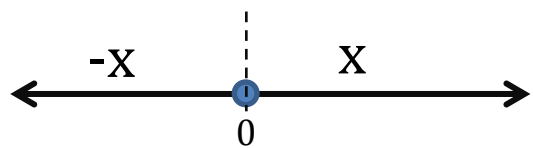
عند التعويض المباشر عن $x=0$ نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2(5x + 8)}{x^2(4x^2 - 16)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(5x + 8)}{(4x^2 - 16)} = \frac{(5 \times 0 + 8)}{(4 \times 0^2 - 16)} = -\frac{1}{2}$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2} - x}{x} = -2$ (a) (b)

عند التعويض المباشر عن $x=0$ نحصل على قيمة غير معينة

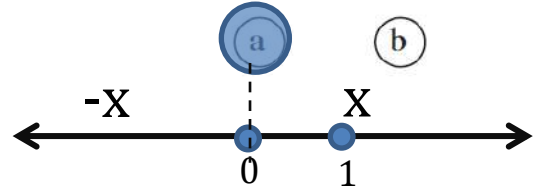
$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \because x \rightarrow 0^- \quad \therefore |x| = -x$$



لأننا نسعى إلى صفر المطلق من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -2 = -2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$$



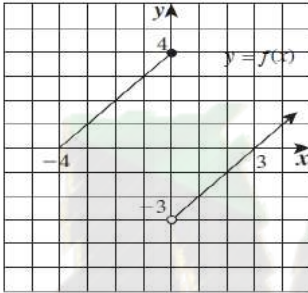
$$\because x \rightarrow 1^+ \quad \therefore |x| = x$$

لأن 1 يقع على يمين صفر المطلق

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

في التمارين (14-6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f .



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$$

(a) 17

(b) -17

(c) 9

(d) -9

$$(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 17 = -9$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$$

(a) 1

(b) 0

(c) $\frac{1}{2}$

(d) غير موجودة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$$

(a) 1

(b) 0

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{3}$

عند التعويض المباشر عن $x=0$ نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(2x-1)} = \frac{2-1}{2 \times 2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

(a) -1

(b) 1

(c) $\frac{1}{2}$

(d) 0

عند التعويض المباشر عن $x=0$ نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة في الأسئلة المقالية يجب التحقق من أن
نهاية ما تحت الجذر أكبر من الصفر
ونهاية المقام لا تساوي الصفر

(11) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} =$

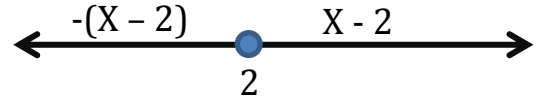
(a) $\frac{1}{2}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{1}{4}$

$\because x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \therefore |x-2| = x-2$



$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} =$

(a) $-\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{1}{4}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \div x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (2+x)}{2(2+x)} \div x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(2+x)} \div x =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(2+x)} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4+2x} = \frac{-1}{4+2 \times 0} = -\frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x+2}} =$

(a) 12

(b) -12

(c) 4

(d) -4

$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt[3]{x} + 2)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow -8} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4) =$

$\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt[3]{x^2} - 2 \lim_{x \rightarrow -8} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \rightarrow -8} 4 =$

$\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -8} x^2} - 2\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -8} x} + \lim_{x \rightarrow -8} 4 = \sqrt[3]{(-8)^2} - 2\sqrt[3]{-8} + 4 = 12$

$$(14) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 9x^2 + 9x}{x+3} =$$

(a) 9

(b) 0

(c) -3

(d) -9

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(2x^2 + 9x + 9)}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)(2x+3)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x(2x+3)) = \lim_{x \rightarrow -3} (2x^2 + 3x) = 2(-3)^2 + 3 \times -3 = 9 \end{aligned}$$

بند (1 - 2) نهايات تشتمل على $\infty, -\infty$ (مقال)

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2|x|} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \right) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = \infty, \frac{1}{2} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty, -\frac{1}{2} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2|x|} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2|x|} = \infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{|(2x-1)^4|} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{(2x-1)^4} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1}{(2x-1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1}{(2x-1)^3} = \infty$$

بند (1 - 2) نهايات تشتمل على $-\infty, \infty$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$$

 a

 b

لأن الأس فردي إذا النهاية من اليسار $-\infty =$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$$

 a

 b

$$\because x \rightarrow \infty \rightarrow \therefore |x| = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$$

 a

 b

$$\because x \rightarrow -\infty \rightarrow \therefore |x| = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{x+3} = -1$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$$

 a

 b

لأن درجة حدودية البسط اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج $0 =$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$$

(a)

(b)

$$\because x \rightarrow -\infty \rightarrow \therefore |2x-3| = -2x+3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2x-3} = -\frac{1}{2}$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

في التمارين (14 - 6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$$

(a) 0

(b) 1

(c) ∞

(d) $\frac{1}{2}$

$$\because x \rightarrow \infty \rightarrow \therefore |x| = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+3} =$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

(a) ∞

(b) $-\infty$

(c) 1

(d) 0

$$(8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} =$$

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

(a) ∞

(b) $-\infty$

(c) 3

(d) -3

$$|x| = \begin{cases} x, & x \rightarrow \infty \\ -x, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{-x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -3$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2} \right) =$$

- (a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x} \right) \left(\frac{5x^2-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2-1}{x^2} \right) = 1 \times 5 = 5$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$$

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

$$\because x \rightarrow \infty \rightarrow \therefore |x+3| = x+3 \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3, & x \rightarrow \infty \\ -(x+3), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(x+3)}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-3}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3}{x-2} \right)^5 =$$

- (a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3^3}{(x-2)^5} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(3^5 \times \frac{1}{(x-2)^5} \right) = -\infty$$

لأن الأس فردي و x توؤول إلى 2 من جهة اليسار و 3⁵ أكبر من الصفر

سؤال من اختبار الفترة الثانية ٢٠١٤/٢٠١٥

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(3-x)^5} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{-(x-3)^5} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{(x-3)^5} = \infty$$

لأن الأس فردي و x توؤول إلى 3 من جهة اليسار و -1 أصغر من الصفر (سالب)

$$(12) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} =$$

(a) ∞

(b) 2

(c) $-\infty$

(d) 0

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(2 \times \frac{1}{(x-4)^3} \right) = \infty$$

لأن الأس فردي و x تؤول إلى 4 من جهة اليمين و 2 أكبر من الصفر

KuwaitMath.com

بند (1-3) الصيغ الغير معينة

في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 7x - 8) = \infty$$

 a

 b

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 2x + 1) = -\infty$$

 a

 b

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$$

 a

 b

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+4}{3x^2-5x+1} = 0$$

 a

 b

لأن درجة البسط حدودية اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 7x^2 - 1}{2x^3 - 4} = 2$$

 a

 b

$$= \frac{4}{2} = 2$$

لأن درجة البسط حدودية = درجة حدودية المقام

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}} = \frac{3}{2}$$

(a)

(b)

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

$$= \frac{3}{-\sqrt{4}} = \frac{-3}{2}$$

في التمارين (7-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^4 + x^2 - 2} =$$

(a) ∞

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 0

(d) $-\infty$

لأن درجة حدودية البسط اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}} =$$

(a) $\frac{5}{3}$

(b) $-\frac{5}{3}$

(c) $\frac{5}{9}$

(d) $-\frac{5}{9}$

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

$$= \frac{-5}{\sqrt{9}} = \frac{-5}{3}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$$

(a) -1

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) 1

$$= \frac{-2}{-\sqrt{4}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

(10) إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^2 + nx + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = -2$ فإن قيم m, n هي:

- (a) $m = 0, n = -2$ (b) $m = 0, n = 2$ (c) $m = 1, n = -1$ (d) $m = 1, n = 1$

لحل هذه التمارين يجب أن تكون درجة الحدودية التي تحت الجذر التربيعي أكبر من درجة الحدودية ب واحد
إذا يجب أن تكون درجة الحدودية (البسط) من الدرجة الأولى

$$mx^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = \frac{n}{\sqrt{1}} = -2 \Rightarrow n = -2$$

(11) إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 3}}{mx^2 + nx - 4} = 1$ فإن قيم m, n هي:

- (a) $m = 0, n = -2$ (b) $m = 0, n = 2$ (c) $m = 0, n = 4$ (d) $m = 0, n = -4$

لحل هذه التمارين يجب أن تكون درجة الحدودية التي تحت الجذر التربيعي أكبر من درجة الحدودية ب واحد
إذا يجب أن تكون درجة الحدودية (المقام) من الدرجة الأولى

$$mx^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 3}}{nx - 4} = \frac{-\sqrt{4}}{n} = 1 \Rightarrow n = -2$$

بند (1 - 4) نهايات بعض الدوال المثلثية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

معلق

(a)

(b)

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

معلق

(a)

(b)

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = 0$$

(a)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

(a)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x}{2 \cos 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{1 + 0}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \sin x + 5x^3}{4x^3} = 2$$

معلق

(a)

(b)

في التمارين (10-6)، ظلّ رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$

- (a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} (3 + x^2 \sin \frac{1}{x}) =$

- (a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

(8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x \cos x}{2x^2} =$

- (a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5 \sin^2 x}{3x^2} =$

- (a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^2}{3x^2} + \frac{5 \sin^2 x}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} + \frac{5}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} \times 1 = 3$$

(10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{|2x|} =$

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

بند (5 - 1) الإتصال

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (a) (b)

(1) الدالة $f: f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x = -2$

أصفار المقام هي -2
الدالة غير معرفة عند $x = -2$

- (a) (b)

(2) الدالة $y = \frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

لأنها حدودية نسبية والمقام $\neq 0$ ، لكل x تنتمي \mathbb{R}

- (a) (b)

(3) الدالة $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$

لأنها عبارة عن قسمة دالتين نفرض أن $g(x) = 1$ ، $h(x) = x + 2$

g دالة ثابتة متصلة عند $x = -1$

المقام دالة جذر تربيعي للدالة نفرض أن $t(x) = x + 2$

t كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$ ، $t(-1) = -1 + 2 = 1 > 0$ ، h متصلة عند $x = -1$

المقام $\neq 0$ عندما $x = -1$ الدالة y متصلة عند $x = -1$

- (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$ وكان $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) - 2) = -1$ فإن $f(-1) = 1$

الدالة متصلة عند $x = -1$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) - 2) = -1 \Rightarrow \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1} 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) - 2 = -1 \Rightarrow \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 + 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 = f(-1)$$

في التمارين (5-12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة $f: f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0, \pi$

(b) $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(d) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x = 0 \forall x \in k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(6) نقاط الدالة $f: f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) 2

(b) -2, 2

(c) -2

(d) -5, 2

يمكن التخلص من الانفصال عند العامل الصفري للمقام الذي يمكن التخلص منه

صفر لكل من البسط والمقام

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

لا يمكن إيجاد النهاية عند $x=-2$
 ، عند $x=-5$ لا يوجد انفصال
 يمكن إيجاد النهاية عند $x=2$

(7) تقاطع الدالة $f(x) = \frac{2x^3 + 16}{x^2 + x - 2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

- (a) -1, 2 (b) -2 (c) 1, -2 (d) 1

لا يمكن التخلص من الانفصال عند العامل الصفري للمقام الذي لا يمكن التخلص منه

صفر للمقام وليس صفرا للبسط

$$f(x) = \frac{2(x^3 + 8)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-1)}$$

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

- (a) $\frac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\frac{|x-2|}{x-2}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x > 2 \\ 3x-5 & : x \leq 2 \end{cases}$

2 صفر للمقام
غير معرفة عند $x = 2$

$2 - 2 = 0$
لابد ان يكون الناتج
اكبر من 0

2 صفر للمقام
غير معرفة عند $x = 2$

(9) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \geq 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجودة (d) $x = 2$ متصلة عند f

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{y \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow 2^+} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{y \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{y \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{y \rightarrow 2^-} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

(10) لتصبح الدالة $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ متصلة عند $x = 1$ ، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

- (a) $\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} & , x \neq 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} & , x > 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} & , x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$ (d) لا يمكن إعادة تعريفها

معلق

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -2$ وكانت $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + f(x)) = 7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

- (a) 3
(c) 9

- (b) 5
(d) 11

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + f(x)) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 7$$

$$4 + \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 = f(-2)$$

f متصلة عند $x = -2$
∴ النهاية = الصورة

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x = 1$ وكانت النقطة $(1, -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x \rightarrow 1} (g(x))^2$ تساوي:

- (a) -6
(c) 1

- (b) -3
(d) 9

$$g(1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x))^2 = (\lim_{x \rightarrow 1} g(x))^2 = (-3)^2 = 9$$

g متصلة عند $x = 1$
∴ النهاية = الصورة

في التمارين (13-15)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة: إذا كانت g دالة متصلة عند $x = a$ ، $a \in \mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x) = \begin{cases} x+1 & : x > a \\ 3-x & : x \leq a \end{cases} \Rightarrow a =$	(a) -1
(14) $g(x) = \begin{cases} 2ax-2 & : x \neq a \\ 3a & : x = a \end{cases} \Rightarrow a =$	(b) 2
(15) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & : x > a \\ 2x & : x \leq a \end{cases} \Rightarrow a =$	(c) 0
	(d) 1
	(e) $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

$$a+1 = 3-a$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$2a^2 - 2 = 3a$$

$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$(a-2)(2a+1) = 0$$

$$a = 2, a = \frac{-1}{2} \text{ مرفوض لأن } a \text{ عدد صحيح من رأس السؤال}$$

الدالة المتصلة
النهاية موجودة
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

الدالة المتصلة
الصورة = النهاية

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

$$3a^2 = 2a$$

$$3a^2 - 2a = 0$$

$$a(3a-2) = 0$$

$$a = 0, a = \frac{2}{3} \text{ مرفوض لأن } a \text{ عدد صحيح من رأس السؤال}$$

الدالة المتصلة
النهاية موجودة
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

بند (6 - 1) نظريات الإتصال

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) الدالة $f: f(x) = x^2 + |x-1|$ متصلة عند $x = 3$

(a) (b)

(2) الدالة $f: f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$

$\frac{2}{x}$ غير معرفة عند $x = 0$

(a) (b)

(3) الدالة $f: f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$

البسط دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 0$
المقام عبارة عن دالتين احدهما ثابتة والأخرى مطلق x كلاهما متصل عند $x = 0$
المقام $\neq 0$ عند $x = 0$

(a) (b)

(4) الدالة $f: f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$

البسط دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x = 3$
المقام كثيرة حدود متصلة عند $x = 3$
المقام $\neq 0$ عند $x = 3$

(a) (b)

(5) الدالة $f: f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$

دالة ما تحت الجذر دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 2$
نعوض عن x بـ 2 ونتحقق أن الناتج أكبر من الصفر

$$-(2)^2 + 5(2) - 4 = 2 > 0$$

في التمارين (12-6)، ظلّل رمز الدائرة اللدال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \frac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) 3

(b) -3

(c) 2

(d) لا يوجد

حدودية نسبية و المقام $\neq 0$ لجميع الأعداد الحقيقية

(7) نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند:

(a) 1, -1

(b) 2, -2

(c) 1, 2

(d) -1, -2

المقام = 0 عندما $x = \pm 1$ f حودية نسبية و أصفار المقام -1, 1

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

(8) لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$ ، الدالة g : $g(x) = \frac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g \circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{4x^2 - 18x + 27}{(x-3)^2}$

(b) $\frac{x^2}{x^2-3}$

(c) $\frac{x^2+3}{x^2}$

(d) $\frac{x^2}{x^2+3}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3 - 3} = \frac{x^2 + 3}{x^2}$$

(9) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g : $g(x) = x^2 + 3$ ، فإن: $(f \circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{x^2}{x-3} + 3$

(b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}} + 3$

(c) $\frac{-(x^2+3)}{x}$

(d) $\frac{x^2+3}{|x|}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 3 - 3}} = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2 + 3}{|x|}$$

(10) لتكن الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ ، $g: g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي:

- a) 4
 c) 1

- b) -4
 d) -1

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2 - 3)^2 + 7} =$$

$$\sqrt{(0^2 - 3)^2 + 7} = \sqrt{9 + 7} = 4$$

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x = 2$ فإن الدالة المتصلة عند $x = 2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

- a) $\sqrt{g(x)}$
 c) $\frac{g(x)}{x-2}$

- b) $\frac{1}{g(x)}$
 d) $|g(x)|$

a خطأ لأنه لم يذكر أن $g(2) > 0$

b. خطأ لأنه لم يذكر أن $g(2) \neq 0$

c. خطأ لأن المقام $= 0$ عندما $x=2$

d. عبارة صحيحة لأن دالة مطلق متصلة دائما على R

(12) إذا كانت الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي:

- a) 4
 c) 16

- b) 9
 d) 25

لا بد أن يكون ما تحت الجذر أكبر من الصفر عند $x = 3$

$$3^2 - 4 = 5 > 0$$

$$3^2 - 9 = 0$$

$$3^2 - 16 = -7$$

$$3^2 - 25 = -16$$

بند (1 - 7) الإتصال على فترة

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a)

(b)

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1, 3]$ ، $[3, 5]$ فإن f متصلة على $[1, 5]$

خطأ لأننا لا بد أن نتأكد من أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار

(a)

(b)

(2) الدالة $f: f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

لأن f عبارة عن ناتج طرح دالتين (كثيرة حدود ومطلق x) وكلاهما متصل لكل قيم x

(a)

(b)

(3) الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2, 2]$

$$f(x) = \sqrt{g(x)}, g(x) = x^2 - 4$$

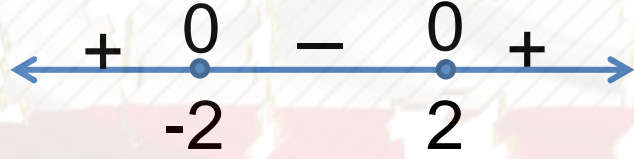
$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2, x = -2$$

$$g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} - (-2, 2)$$



الدالة $g(x) < 0$ في الفترة $(-2, 2)$

(a)

(b)

(4) الدالة $f: f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty, 0)$

الدالة f حدودية نسبية متصلة على \mathbb{R} ما عدا أصفار المقام

أصفار المقام $\{-2\}$

$\{-2\} \in (-\infty, 0)$

(a)

(b)

(5) الدالة $f: f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty, 2)$ فقط

هي غير متصلة عند فقط أصفار المقام وهي $\{2\}$ (متصلة على $\mathbb{R}/\{2\}$)

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة الذال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة $f: f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f :

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x = -1$, $x = 4$

(b) متصلة على $(-\infty, 4]$

(d) ليس أي مما سبق

(c) متصلة على مجالها

متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$

متصلة على $(-\infty, 4), (4, \infty)$

الدالة f لها نقطة انفصال عند أصفار المقام التي لا يمكن التخلص عند $\{4\}$

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2, 3]$ فإن:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(3)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-2)$

الدالة متصلة على الفترة المفتوحة $(-2, 3)$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$

الدالة متصلة عند $x = -2$ من جهة اليمين

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$

الدالة متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار

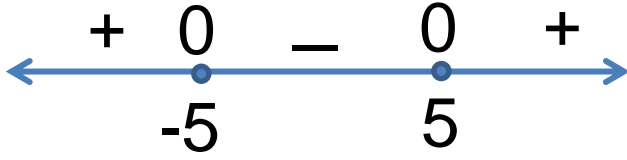
(8) الدالة $f: f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

(a) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

(b) $(5, \infty)$

(c) \mathbb{R}

(d) $(-5, 5)$



لا بد أن يكون ما تحت الجذر $0 \leq$

المجال $R - (-5, 5) = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

$x \neq \pm 5$

لا بد أن يكون المقام لا يساوي 0

$\forall x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ متصلة f الدالة \therefore



(9) لتكن $f: f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & : x \leq -3 \\ \frac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : -3 < x < 0 \\ \frac{4-x^2}{x-2} & : x \geq 0 \end{cases}$ فإن f دالة متصلة على:

(a) $(-\infty, \infty)$

(b) $(-\infty, 2)$

(c) $(-\infty, 0]$

(d) $(-\infty, -3]$



الدالة f متصلة على $(-\infty, -3]$ (دالة ثابتة)

والدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليمين (الصورة = النهاية من جهة اليمين)

من الفرع الثاني الدالة f متصلة على $(-3, 0)$

لأنه

لا يوجد أصفار للمقام و مجال الجذر هو كل الأعداد الحقيقية

من الفرع الثالث f متصلة $\{2\} - [0, \infty)$ $\forall x \in$

والدالة f غير متصلة عند $x=0$ من جهة اليسار (الصورة \neq النهاية من جهة اليسار)

$$(10) \text{ الدالة } f: \begin{cases} \frac{3x+m}{x-2} & : x < 1 \\ x+n & : x > 1 \\ 2m & : x = 1 \end{cases} \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ إذا كان:}$$

(a) $m = -1, n = 3$

(b) $m = 1, n = -3$

(c) $m = -1, n = -3$

(d) $m = 1, n = 3$

الدالة f متصلة على \mathbb{R} إذا f متصلة عند $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + n \Rightarrow 1 + n = 2m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+m}{x-2} = \frac{3+m}{-1} = 2m \Rightarrow$$

$$3+m = -2m \Rightarrow 3 = -3m \Rightarrow m = -1$$

$$1+n = 2m \Rightarrow 1+n = 2 \times -1 \Rightarrow 1+n = -2 \Rightarrow n = -3$$

$$(11) \text{ الدالة } g: \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & : x > 1 \\ 3x & : x \leq 1 \end{cases} \text{ متصلة على:}$$

(a) $(-\infty, 1], (1, \infty)$

(b) $(-\infty, 1), [1, \infty)$

(c) $(-\infty, \infty)$

(d) $(-\infty, 3]$



من الفرع الأول حدودية نسبية (أصفار المقام هي 1) الدالة g متصلة على $(1, \infty)$
من الفرع الثاني كثيرة حدود متصلة على $(-\infty, 1]$ وبحث الإتصال عند $x=1$ من جهة اليمين

$$g(1) = 3 \times 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1 - 1 = 0$$

$$g(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

الدالة g غير متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين